[略解] 線形代数学 II 期末試験的なレポート問題 [略解]

- 答えは論理的に、貴方の考えが伝わるように書くこと。数値的な答えだけではほとんど点はありません。
- 本稿は略解です。たとえこのとおりに書いたとしても説明が足りなければほとんど点はありません。

問題 242.1. $a, b, c, x, y, z, p, q, r \in \mathbb{C}$ とする。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0_3 & A_2 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) $(A - 3 \cdot 1_6)^3 \cdot (A - 2 \cdot 1_6)^2$ を求めよ。
(答)

$$(A-3\cdot 1_6)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & a-2b & -(2y)+x+b-a & y-x-2q+p+a \\ 0 & -1 & 0 & b & y-b & -y+q+b \\ 0 & 0 & -1 & c & z-c & -z+r+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *_3 & *_3 \\ 0_0 & 0_3 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2 \cdot 1_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b+a & y+x+a & x+q+p \\ 0 & 0 & 0 & b & y+b & y+q \\ 0 & 0 & 0 & c & z+c & z+r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & *_3 \\ 0_3 & *_3 \end{pmatrix}$$

よって

$$(A-3\cdot 1_6)^3\cdot(A-2\cdot 1_6)^2 \overset{\text{可換性}}{=} (A-2\cdot 1_6)^2\cdot(A-3\cdot 1_6)^3 = \begin{pmatrix} 0_3 & *_3 \\ 0_3 & *_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} *_3 & *_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix} = 0_6$$

(A の多項式の可換性に注意して上記のように入れ替えないと計算が大変なので注意。–ですが全ての解答は可換性を使わずに計算をしていたようです。–実際にそのような解答があった際には可換性をきちんと説明できるかどうか (一行の説明を) 尋ねたところでしょう。)

(2) $\mathrm{Image}(A - 2 \cdot 1_6)^2$ の基底を一組求めよ。$(A - 2 \cdot 1_6)^2$ の 0 でない列ベクトルを並べて、

$$\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} b+a \\ b \\ c \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} y+x+a \\ y+b \\ z+c \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{v}_3 = \begin{pmatrix} x+q+p \\ y+q \\ z+r \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えると、これらは一次独立であることがわかる。

(3) A の 2-弱固有空間を求めよ。6 次の基本ベクトル

$$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3.$$

で張られるベクトル空間がそれである。言い換えれば答えは

$$V_2 = \mathbb{C}\mathbb{e}_1 + \mathbb{C}\mathbb{e}_2 + \mathbb{C}\mathbb{e}_3$$

である。

(4) A の 3-弱固有空間を求めよ。
(答)

$$V_3 = \mathbb{C}\mathbb{v}_1 + \mathbb{C}\mathbb{v}_2 + \mathbb{C}\mathbb{v}_3.$$

(5) $P \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ を適当にとって、 $P^{-1}AP$ をジョルダンの標準形にせよ。
(答)

$$P = (\mathbb{e}_1 \mathbb{e}_2 \mathbb{e}_3 \mathbb{v}_1 \mathbb{v}_2 \mathbb{v}_3)$$

を考えれば良い。

$P^{-1}AP$ がどのような行列かは、計算すれば (もしくは考えれば) すぐわかるから本略解では (略解なので) 省略する。なお、 $\det(P) = 1$ であることから、$\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$, $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3$ は一次独立であること、そこから弱固有空間が (3)(4) で述べたものであることもわかる。(講義で言えば補題 11.5 の系 11.1(とくに (2)(6) あたり) を使います。)