[古い] 理工系線形代数学 期末試験的なレポート問題 [過去問](略解)

- ~~問題は土基がよいというときまで予告なく変更される可能性があります。~~
- 計算のチェックに maxima 等の数式処理ソフトを用いても構いません。(あくまで、チェックであって、経過 (プロセス) を含めた実際の解答は皆さんの頭で考えたものをお書きください。) 必須ではありませんが、もし用いた場合にはソフト名湯等を簡単に記しておいていただくとありがたいです。
- 30.1 の赤文字部分を追加しました。大抵の解答は Q を求めているのでさしたる変更ではないと思います。

問題 30.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

とおく。A を $V = \mathbb{R}^4$ から $W = \mathbb{R}^4$ への線型写像と同一視する。このとき、

(1) A を行基本変形して、階段行列 (仮に B とおく) にせよ。(経過も書くこと。)
(2) 単位行列 E_4 (講義では 1_4 と書いていたこともありました。どちらも同じ意味です。) に上の (1) と全く同じ行基本変形をして、得られた行列を Q とおく。 Q と QA を求めよ。
(3) $\mathrm{Ker}(A)$ を求めよ。
(4) $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ。
(5) この場合の次元等式 $\dim V - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Image}(A))$ を具体的な数字を入れて完成せよ。

(略解)
(1)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

他には

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$QA = B$$

(3)

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; A\mathbb{v} = 0\} = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; QA\mathbb{v} = 0\} = \mathrm{Ker}(B)$$

$$\mathrm{Ker}(B) = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^4; B\mathbb{v} = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; v_1 - 2v_3 + v_4 = 0 \text{ and } v_2 + 3v_3 + 2v_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2v_3 - v_4 \\ -3v_3 - 2v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; v_3, v_4 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

つまり、 $\mathrm{Ker}(A)$ は ${}^t[2,-3,1,0], {}^t[-1,-2,0,1]$ の線形結合からなる 2 次元のベクトル空間である。これは A の列ベクトルに次のような 2 つの一次の関係式があることを示している。

$$2.\mathbb{w}_1 - 3.\mathbb{w}_1 + 1.\mathbb{w}_3 + 0.w_4 = 2. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 3. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 0. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

$$-1.\mathbb{w}_1 - 2.\mathbb{w}_2 + 0.\mathbb{w}_3 + 1.\mathbb{w}_4 = -1. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0. \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + 1. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

(4)

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2 + \mathbb{w}_3.v_3 + \mathbb{w}_4.v_4; v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}\}$$

で、これでもよいのであるが、実際には $\{\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \mathbb{w}_3, \mathbb{w}_4\}$ は関係式がある (一次独立ではない) ので、その分減らすことができて、

$$\mathrm{Image}(A) = \{A\mathbb{v}; \mathbb{v} \in V\} = \{\mathbb{w}_1.v_1 + \mathbb{w}_2.v_2; v_1, v_2, \in \mathbb{R}\}.$$

(5) A の列ベクトルの数 ($\dim(V)$) のうち、核で潰れる分 ($\dim(\mathrm{Ker}(A))$) を差し引いたものが像の次元 ($\dim(\mathrm{Image}(A))$) であるから、

$$\begin{array}{ccc} \dim V - \dim\ (\mathrm{Ker}(A)) & = & \dim(\mathrm{Image}(A)) \\ 4 - \quad 2 & = & 2 \end{array}$$

これが (この問題の場合の) 次元定理である。

問題 30.2. $M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 0 & -42 & -36 \\ 0 & 55 & 47 \end{bmatrix}$ とする。このとき次の各問に答えよ。

(1) M の固有値をすべて求めよ。 (5)
(2) M の各固有値に関する固有ベクトルを一つづつ求めよ。 (15)
(3) M を対角化せよ。 (20)
(*採点としては他に (1)-(3) とおしての答え方が 10)

(答)
(1) $3, 2, -3$ (どれも重複度は 1).

(2) -3 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2 に対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 19 \\ -45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

(3)

(2) の結果をまとめると

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

よって、$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 19 \\ 0 & -8 & -45 \\ 0 & 10 & 55 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

とおけば、P は正則行列で、

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{(対角行列)}$$

.