

## 理工系線形代数学 期末試験的なレポート問題

### 期末試験

- 問題は予告なく変更される可能性があります。
- 計算のチェックに maxima 等の数式処理ソフトを用いても構いません。(あくまで、チェックであって、経過(プロセス)を含めた実際の解答は皆さんの頭で考えたものをお書きください。) 必須ではありませんが、もし用いた場合にはソフト名湯等を簡単に記しておいていただくとありがたいです。
- 言うまでもないことだと思って書いていなかったが、すべてのことには理由を書くこと。(1/17 追記)

### 問題 2023.1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

とおく。  $A$  を  $V = \mathbb{R}^5$  から  $W = \mathbb{R}^4$  への線型写像と同一視する。このとき、

- (1)  $A$  を行基本変形して、階段行列(仮に  $B$  とおく)にせよ。(経過も書くこと。)
- (2) 単位行列  $1_4$  (講義では  $E_4$  と書いていたこともありましたが。どちらも同じ意味です。) に上の(1)と全く同じ行基本変形をして、得られた行列を  $Q$  とおく。  $Q$  と  $QA$  を求めよ。
- (3)  $\text{Ker}(A)$  を求めよ。
- (4)  $\text{Image}(A)$  とその一組の基底を求めよ。(ただしそれが基底であることの証明は書かなくても良い。)
- (5) この場合の次元等式  $\dim V - \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Image}(A))$  を具体的な数字を入れて完成せよ。

問題 2023.2.  $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  とする。このとき次の各問に答えよ。

- (6)  $M$  の固有値をすべて求めよ。
- (7)  $M$  の各固有値に関する属する固有ベクトルを一つずつ求めよ。(2024/1/28 修正: 「属する」でも「対応する」でも良かったが、講義中「関する」という言葉は使っていませんでした。訂正します。すみません。)
- (8)  $M$  を対角化せよ。つまり  $P^{-1}MP$  が対角行列であるような正則行列  $P$  を求めよ。ただし、 $P$  の成分が整数であるように留意すること。プロセスも書くこと。