

理工系線形代数学 NO.13
過去の練習問題

問題 13.1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

とおく。\$A\$ を \$V = \mathbb{R}^3\$ から \$W = \mathbb{R}^4\$ への線型写像と同一視する。このとき、

- (1) \$A\$ を行基本変形して、階段行列 (仮に \$B\$ とおく) にせよ。
- (2) \$E_4\$ に上と全く同じ行基本変形をして、得られた行列を \$Q\$ とおく。\$QA\$ を求めよ。
- (3) \$\text{Ker}(A)\$ を求めよ。
- (4) \$\text{Image}(A)\$ を求めよ。
- (5) この場合の次元等式 \$\dim V - \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Image}(A))\$ を具体的な数字を入れて完成せよ。

(略解)

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ +(-4) \times (\text{一行目}) \\ +(-7) \times (\text{一行目}) \\ +(-10) \times (\text{一行目}) \end{array}$$

$$\rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ \times(-1/3) \\ \text{(そのまま)} \\ \text{(そのまま)} \end{array}$$

$$\rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ \text{(そのまま)} \\ +6 \times (\text{2行目}) \\ +9 \times (\text{2行目}) \end{array}$$

$$\rightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = Q_1 A$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_1 = Q_2 A_1$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_2 = Q_3 A_2$$

(2)

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ +(-4) \times (\text{一行目}) \\ +(-7) \times (\text{一行目}) \\ +(-10) \times (\text{一行目}) \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ \times(-1/3) \\ \text{(そのまま)} \\ \text{(そのまま)} \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(そのまま)} \\ \text{(そのまま)} \\ +6 \times (\text{2行目}) \\ +9 \times (\text{2行目}) \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q
 \end{aligned}$$

上の計算に出てくる各行列が何であるか考えると (←問題)

$$Q = Q_3 Q_2 Q_1$$

$$QA = B$$

(3)

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; A\mathbf{v} = 0\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; QA\mathbf{v} = 0\} = \text{Ker}(B)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(B) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3; B\mathbf{v} = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \text{ and } v_2 + 2v_3 = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} v_3 \\ -2v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}; v_3 \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

つまり、 $\text{Ker}(A)$ は $[1, -2, 1]$ の定数倍からなる一次元のベクトル空間である。これは A の列ベクトルに次のような一次の関係式があることを示している。

$$1 \cdot \mathbf{w}_1 - 2 \cdot \mathbf{w}_2 + 1 \cdot \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = 0.$$

(4)

$$\text{Image}(A) = \{A\mathbf{v}; \mathbf{v} \in V\} = \{\mathbf{w}_1 \cdot v_1 + \mathbf{w}_2 \cdot v_2 + \mathbf{w}_3 \cdot v_3; v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}$$

で、これでもよいのであるが、実際には $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ は関係式がある (一次独立ではない) ので、その分減らすことができ、

$$\text{Image}(A) = \{A\mathbf{v}; \mathbf{v} \in V\} = \{\mathbf{w}_1 \cdot v_1 + \mathbf{w}_2 \cdot v_2; v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(5) A の列ベクトルの数 ($\dim(V)$) のうち、核で潰れる分 ($\dim(\text{Ker}(A))$) を差し引いたものが像の次元 ($\dim(\text{Image}(A))$) であるから、

$$\begin{aligned} \dim V - \dim(\text{Ker}(A)) &= \dim(\text{Image}(A)) \\ 3 - 1 &= 2 \end{aligned}$$

これが (この問題の場合の) 次元定理である。