

理工系線形代数学 NO.11 要約

今日のテーマ: 線形写像、線形変換

ベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像で、和を和に、スカラー倍をスカラー倍に写すものを線形写像という。ベクトル空間 V からそれ自身への線形写像を線形変換という。

命題 11.1. ベクトル空間 V, W の基底をとると、 V から W への線形写像は行列で書くことができる。 V, W の次元をそれぞれ n, m とすると、その行列は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の元である。とくに、 V から V への線形変換は $M_n(\mathbb{R})$ の元で表現できる。

定義 11.2. 線形写像 $f : V \rightarrow W$ に対して、その核 $\text{Ker}(f)$ と像 $\text{Image}(f)$ を

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{\mathbf{w} \in V; f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}, \\ \text{Image}(f) &= \{f(\mathbf{w}); \mathbf{w} \in W\}.\end{aligned}$$

で定義する。

行列の行基本操作を使うことにより、次のことがわかる。

命題 11.3 (次元定理). $f : V \rightarrow W$ が有限次元ベクトル空間の間の線形写像なら、

$$\dim \text{Image}(f) = \dim V - \dim \text{Ker}(f)$$

この量は $\text{rank } A$ と等しい。

線形変換では、「変換後と変換前を比べる」ことができる。とくに、対角行列による変換は考えやすい。

定義 11.4. $A = (a_{ij})$ が対角行列であるとは、対角成分以外の成分が 0, すなわち

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j \text{ のとき})$$

が成り立つときにいう。

スペースの都合で、この「要約」では「対角行列 $D = \text{diagonal}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 」という書き方をする。対角成分が d_1, \dots, d_n であとは 0 であるような行列という意味である。

対角行列同士の和や積は特別に易しい。これは、対角行列 $D = \text{diagonal}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ に対しては、基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ が

$$D\mathbf{e}_1 = d_1\mathbf{e}_1, \quad D\mathbf{e}_2 = d_2\mathbf{e}_2, \quad D\mathbf{e}_3 = d_3\mathbf{e}_3, \quad \dots, \quad D\mathbf{e}_n = d_n\mathbf{e}_n,$$

を満たしているからである。

命題 11.5. 対角行列 $A = \text{diagonal}(a_1, \dots, a_n), B = \text{diagonal}(b_1, \dots, b_n)$ に対して、

- (1) $A + B = \text{diagonal}((a_1 + b_1), \dots, (a_n + b_n))$.
- (2) $A - B = \text{diagonal}((a_1 - b_1), \dots, (a_n - b_n))$.
- (3) $cA = \text{diagonal}(ca_1, \dots, ca_n)$ ($c \in \mathbb{R}$.)
- (4) $AB = \text{diagonal}(a_1b_1, \dots, a_nb_n)$.

つまり、対角行列の線形結合、積は成分ごとに行って良い。