理工系線形代数学中間試験的なレポート問題

中間試験的なレポート問題　答えのヒント

問題 20.1. つぎをときなさい。

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

を解いて、解集合 S_2 とその次元を求めよ。
　拡大係数行列

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | \, 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & | \, 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & | \, 8 \end{bmatrix}$$

に行基本変形を行う。(1 行目)x 2 を　3 行目から引くと、

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | \, 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & | \, 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{bmatrix}$$

を得る。 これはつまり、与えられた方程式が

$$\begin{cases} x + 2y + \quad 3z + 4u + 5v + 6w = 2 \\ \qquad\qquad\quad z + 2u + 3v + 4w = 4 \end{cases}$$

と同値であるということである。移項すれば、これは与えられた方程式が次の連立方程式と同値であると言ってもよい。

$$\begin{cases} x = -(2y + \quad 3z + 4u + 5v + 6w) + 2 & \text{(i)} \\ \qquad\qquad\quad z = -(2u + 3v + 4w) + 4 & \text{(ii)} \end{cases}$$

これを満たす $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$ を求めなさいということである。これを行うには、(係数の行列が階段行列であることに着目して) 「変数を下から順に決めていく」とよい。$w \to v \to u \to z \to y \to x$ と値を決めていくということである。

(a) まず w,v,u を自由に定める。そのままでも良いが勝手な値を取れるということを強調するために $w = t_1, v = t_2 u = t_3 (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$ と書いておこう。

(b) (ii) 式は z をそれより「下にある」 u, v, w で決めることを言っているから、t_1, t_2, t_3 を用いると

$$z = -(2t_3 + 3t_2 + 4t_1) + 4$$

である。

(c) y も自由に決められる。これも $y = t_4 (t_4 \in \mathbb{R})$ と書こう。

(d) (i) 式は x をそれより「下にある」(既に値が決まった) y, z, u, v, w で決めることを言っている。つまり、

$$\begin{aligned} x &= -(2y+3z+4u+5v+6w)+2 \\ &= -2t_4+3(-(2t_3+3t_2+4t_1)+4)+4t_3+5t_2+6t_1)+2 \\ &= -2t_4+2t_3+4t_2+6t_1-10 \end{aligned}$$

解の集合 (解集合) は

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \middle| A_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \middle| A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -2t_4+2t_3+4t_2+6t_1-10 \\ t_4 \\ -2t_3-3t_2-4t_1+4 \\ t_3 \\ t_2 \\ t_1 \end{bmatrix} \middle| t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解いて、解集合 S_3 とその次元を求めよ。

$S_3 = \emptyset$. $\dim S_3$ は定義されない。

問題 20.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

とする。このとき A の行列式 $\det(A)$ **の値**を求めよ。

(答) 1 行に関する行展開を行うと

$$\det(A) = (-1)^{1+3} \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -2.$$

もしくは、サラスの方法により、$\det(A) = -2$. とやってもよい。