体論要約 NO.6 補足: 平方数について

命題 16.1. $a \in \mathbb{Z}$ が有理数の平方に等しかったとする。このとき a は平方数である。

対偶をとって少し言い換えれば: $a \in \mathbb{Z}$ が平方数でなければ、$X^2 - a$ の根は有理数ではない。

証明. もし a が平方数でなければ、$X^2 - a$ は $\mathbb{Z}$ 上既約であり、ガウスの補題により、$X^2 - a$ は $\mathbb{Q}[X]$ の元としても既約である。 □

ちなみに、上の命題は、次のことの特別な場合とも言える。(あくまで参考程度にどうぞ。今年度の期末試験にはあまりかんけいありません。)

命題 16.2. 有理数 $r \in \mathbb{Q}$ がモニックな整数係数多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ の根であれば、r は $\mathbb{Z}$ の元である。(モニックな整数係数多項式の根のことを「**代数的整数**」と呼ぶ。数論の先生は整数といえば「代数的整数」を指す人もいるので注意が必要かも知れない。) その意味で $\mathbb{Z}$ の元を (上の命題が成り立つことを納得した上で) 「**有理整数**」とも呼ぶ。

証明. 次の命題の f の最高次の係数が 1 の場合である。 □

命題 16.3. 既約分数 $r = \frac{c}{d}$ ($c, d \in \mathbb{Z}$, c, d は互いに素) が $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ の根であるとする。このとき:

(1) d は f の最高次の係数の約数である。

(2) c は f の定数項の約数である。

証明.

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_0, \ldots a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0)$$

とおく。

$$(f(c/d) =) a_n (c/d)^n + a_{n-1} (c/d)^{n-1} + \cdots + a_1 (c/d) + a_0 = 0$$

の両辺に d^n を掛けると、

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = 0$$

$$a_n c^n = -d(a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^{n-1})$$

c と d は互いに素であるから、$d | a_n$. 同様に、

$$a_0 d^n = -c(a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c d^{n-2} + a_1 d^{n-1})$$

で d と c は互いに素であるから $c | a_0$ である。 □