体論: 期末試験的なレポート問題解答例 (略解)

- 言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。
- とくに、「... は既約である。」と書く場合には、理由を添えると加点される。(本題に関係のないことを書いている場合を除く。)
- maxima などの数式処理ソフトを用いてもよいが、肝心なところは自分でチェックや証明をすること。(必須ではないがもし使った場合には使用ソフト名を挙げてください。)
- この略解はあくまで「略」なので、この通りに書いたとしてもそんなに点数は期待できません。

問題 23.1. $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおき、$K = \mathbb{Q}[\omega]$ とおく。さらに、

$$\alpha = \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}, \quad \beta = \sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$$

とおく。このとき、次の各問いに答えなさい。

(1) $L = K[\alpha]$ は K のガロア拡大であることを示しなさい。
(2) K 上の α の次数 (すなわち拡大次数 $[K(\alpha) : K]$) を求めなさい。
(3) K 上の α の最小多項式を求めなさい。
(4) K と L の間の中間体とその K 上の拡大次数をすべて求めなさい。
(5) K と L の間の中間体のハッセ図を書きなさい。

[配点] 各小問すべて 20 点。
[略解] (1) まず $\alpha^3\beta^3 = 27 = 3^3$ であることに注意しよう。$\alpha\beta$ は実数であるから、

$$\alpha\beta = 3$$

であることがわかる。 よって $\beta = 3/\alpha \in K(\alpha) = K[\alpha] = L)$ である。つぎに $S \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\omega^i | i = 0, 1, 2\} \cup \{\beta\omega^i | i = 0, 1, 2\}$ の元の 6 つはどれも

$$m(X) \overset{\text{def}}{=} (X^3 - 7)^2 - 22$$

の根である。(すぐチェックできる。) よって、α の K 上の共役の可能性があるのは S の 6 つの元に限られ、それらはすべて L の元であるから、 L は K 上の正規拡大である。m は重根を持たないから、(もしくは K の標数が 0 であるから、とやっても良い) (L は K の分離拡大でもあり、したがって L は K のガロア拡大である。

　このことと $\alpha^3 + \beta^3 = 14$ であることを用いると $t = \alpha + \beta$ は

$$t^3 - 9t - 14 = 0$$

の根であることがわかる。
(2)(3) t は 3 次方程式 $t^3-9t-14=0$ の根である。これは $\mathbb{Q}$ 上既約である。(いくつかの証明があるだろうが、ガウスの補題で $\mathbb{Z}$ 上に話を落とし、そのあと $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ に持っていくのが結構簡単だ。) ゆえに $[\mathbb{Q}[t]:\mathbb{Q}]=3]$.

$$[L:\mathbb{Q}]=[L:\mathbb{Q}[t]]\cdot[\mathbb{Q}[t]:\mathbb{Q}]=3[L:\mathbb{Q}[t]] \tag{あ}$$

他方、K は $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大だから、

$$2[L:K]=[L:\mathbb{Q}] \tag{い}$$

で、(あ) と (い) を組み合わせると $[L:K]$ は 3 の倍数であることがわかる。

他方、$L\subset K[\sqrt{22}]$ で、ヒントにあるように $K[\sqrt{22}]$ は K の 2 じ拡大であるから、$[L:K]$ は 偶数でなければならない。さきに出てきた $m(X)$ は α を根に持ち、6 次式であるから
m は K 上の α の最小多項式であって、同時に

$$[L:K]=6$$

であるということがわかる。
(4) (群論に関するいくつかの事実は本稿では証明なしに使う。) $K[t]$ は K のガロア拡大であることがわかるから、それに対応する G の部分群 H_1 は G の正規部分群である。同様に $K[\sqrt{22}]$ に対応する G の部分群 H_2 も G の正規部分群である。群論のよく知られた事実 (G の正規部分群 H_1,H_2 があって、$\gcd(|H_1|,|H_2|)=1$ かつ $|H_1||H_2|=|G|$ ならば、$G\cong H_1\times H_2$.) により、

$$G\cong H_1\times H_2.$$

G は必然的に位数 6 の巡回群と同型であり、したがってその部分群は (巡回群の部分群は巡回群であるというよく知られた事実により、) $\{e\},H_1,H_2,G$ の 4 つである。
(5)

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash, "3"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
K[\sqrt{22}] \arrow[d, dash, "2"'] & K[t] \arrow[dl, dash, "3"] \\
K &
\end{tikzcd}$$