微分積分学概論やってみよう問題 NO.14

出席番号、名前：________________________

問題 14.1. M に対して、K を大きく取る。それなりの自由度があるが、本問では $L = 4M, K = K_M = L^2 (= 16M^2)$ と置こう。$n \geq 2K+1$ のとき

$$n! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots K) \cdot \underbrace{(K+1) \cdot (K+2) \cdots n}_{n-K \text{ 個}} \geq 1 \cdot K^{n-K} = L^{2n-2K} = L^{(n+1)}(L^{n-2K-1})$$

$$\underset{n \geq 2K+1}{\geq} L^{n+1} = (4M)^{n+1}$$

に注意する。すなわち、$\forall M \exists K = K_M \quad (n \geq 2K_M + 1 \implies n! \geq (4M)^{n+1})$ である。$\exp_n(x)$ を

$$\exp_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

と定義する。

(1) $\forall x \in [-M, M]$ にたいして

$$n, m \geq 2K_M + 1 \implies |\exp_n(x) - \exp_m(x)| \leq \frac{1}{M}$$

(2) $\forall x \in [-M, M]$ にたいして $\{\exp_n(x)\}$ は収束する。収束値を $\exp(x)$ と書くことにする。

(3) $\forall x \in [-M, M]$ $(n \geq 2K_M + 1 \implies |\exp_n(x) - \exp(x)| \leq \frac{1}{M})$ (→「一様収束性」)

(4) $\lim_{n\to\infty} \exp_n(x)$ は x について連続である。(「連続関数の一様収束極限は連続」)

(5) $x, y, x+y \in [-M, M] \implies \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$. 従っていつでも $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

(6) $e = \exp(1)$ とおくと $\exp(x) = e^x$.

問題 14.0.1. 一行感想を述べてください。

答:

答えは下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。