

## 天井関数と床関数、整数部分

**命題 0.1.** 任意の与えられた実数  $x$  に対して、 $x$  以上の整数  $n$  が存在する。

*Proof.* さもないと、 $x$  は  $\mathbb{N}$  の上界になってしまい、アルキメデスの原理に反するからである。  $\square$

そこで、

**定義 0.2.** 実数  $x$  に対して、 $x$  以上の整数のうち、最小のものを  $\lceil x \rceil$  と呼ぶ。 $\lceil x \rceil$  は  $x$  の天井関数と呼ばれる。

同じように、

**定義 0.3.** 実数  $x$  に対して、 $x$  以下の整数のうち、最大のものが存在し、それを  $\lfloor x \rfloor$  と呼ぶ。 $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  の床関数と呼ばれる。

注意 0.4. おまけの注意:

- 天井関数と床関数はどちらも有用であるが、とりあえず片方だけ覚えれば良いかもしれない。
- $\lfloor x \rfloor$  は  $x$  の整数部分と呼ばれ、こちらのほうがポピュラーであるので、本講義では主にこちらのみを用いる。
- $x \leq \lfloor x \rfloor + 1$  であるから、 $x$  以上の整数としては  $\lfloor x \rfloor + 1$  をもちいて、これを  $\lceil x \rceil$  の代用品とする。
- 実際には  $\lfloor x \rfloor + 1$  と  $\lceil x \rceil$  には違いがある。(  $x$  が整数の場合のみ 1 だけの差がある。 )
- 天井関数と床関数については wikipedia も十分なことが書いてあります。