微分積分学概論要約 NO.4

第 4 回目の主題： $\boxed{\text{数列の収束の定義とそれに関する諸定理}}$

定理 4.1. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ収束するとする。このとき、

(1) 「極限をとる」という操作は線形である。すなわち、$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ は収束して、

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(\lim_{n\to\infty} a_n) + \mu(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(2) 「実数の乗法は連続である。」

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

(3) 実数の除法は「連続」である。もっと詳しく言うと、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ なら、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ であって、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

上の定理は、どちらかというと特別な二変数関数の連続性に関する定理として扱うほうが見通しが良い。二変数関数の連続性については二年生時に詳細に学ぶことになるが、それまで待っているわけにもいかないので上のようなカッコ「」を用いた煮え切らない表現ではあってもここに述べる必要があったというワケ。

問題 4.1. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が c に収束するとき、

$$\{a_n^{10}\}_{n=1}^{\infty}$$

は収束すると言えるだろうか。言えるならばその収束先と理由を、言えないならば反例を作りなさい。(注意: 今回の講義で証明する定理をただ用いるのではなく、収束の定義に戻って (ϵ-N 論法で) 説明すること。)

(ヒント: 2 項定理)

付録: 「数列が収束する」ことの証明のフォーマット。四角の中に埋めるものが肝要。その他、行間に理由付けのための文章を書く必要がある場合もある。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束する。

$(\because)$
$\forall\epsilon > 0$ に対して
N (“締切日”) として $\boxed{}$ を採用する。すると、この N より大きい任意の n に対して、

$$|a_n - \alpha| < \boxed{} < \epsilon$$

$\square$

例題 4.2. $k(n)$ を、n を十進数で表記したときの桁数とする。

$$a_n = \frac{1}{k(n)} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

とおくと、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する。