# 線形代数学 II NO.10 要約

今日のテーマ: **行列の三角化。**

今回も引き続き、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

**定理 10.1.** $n$ 次正方行列 $A$ は常に三角化可能である。すなわち、ある上半三角行列と相似である。

**定義 10.2.** $\mathbb{C}$ 係数の $n$-次正方行列 $A$ と 一変数多項式 $f(x)$ に対して、$f(A)$ を次のように定義する:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

にたいして、

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E_n.$$

**系 10.1** (定理 10.1 の系:Cayley-Hamilton)**.** 行列 $A$ の固有多項式 $f_A$ を考える。$f_A$ に行列 $A$ を代入したもの $f_A(A)$ は ゼロ行列に等しい。

定理 10.1 の証明には次のことを用いる。

**補題 10.3.** 正方行列 $A_1, A_2$ が相似、すなわちある正則行列 $P$ が存在して $A_1 = PA_2P^{-1}$ であるとき、$f(A_1) = Pf(A_2)P^{-1}$.

**補題 10.4.** $n \times n$-行列 $A$ が、$(n-1) \times (n-1)$-行列 $B$ と定数 $\lambda$ を用いて、$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ と表せているとき、

(1) $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & * \\ 0 & B^n \end{pmatrix}$

(2) もっと一般に、任意の一変数多項式 $f(x)$ に対して、

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & * \\ 0 & f(B) \end{pmatrix}$$

注意 10.1. 補題 10.4 は $\lambda$ のところが数ではなく、行列であっても (つまり、ある $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ にたいして $\lambda$ が $k \times k$-行列、$B$ が $(n-k) \times (n-k)$ 行列であっても) 同様に成り立つ。($A$ は $\lambda$ と $B$ の直和であると表現する。)