線形代数学 II NO.3 要約

今日のテーマ: **直交基底。正規直交基底**

定義 3.1. 内積を持つベクトル空間を 計量ベクトル空間 と呼ぶのであった。計量ベクトル空間 V の $\mathbf{0}$ でない元の集合 $\{\mathbb{v}_i\}_{i=1}^n$ が

(1) 直交系であるとは、すべての $i \neq j$ にたいし、 $\mathbb{v}_i \cdot \mathbb{v}_j = 0$ を満たすときにいう。
(2) 正規直交系であるとは、直交系であって、すべての i に対し $||\mathbb{v}_i|| = 1$ のときにいう。

補題 3.2. $\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ が一次独立のとき、次のような直交系 $\mathbb{b}_1, \dots \mathbb{b}_k$ が一意に存在する。

$$(\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k) = (\mathbb{b}_1, \dots \mathbb{b}_k) \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3.3. $\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k$ が一次独立のとき、次のような正規直交系 $\mathbb{u}_1, \dots \mathbb{u}_k$ が一意に存在する。

$$(\mathbb{a}_1, \dots \mathbb{a}_k) = (\mathbb{u}_1, \dots \mathbb{u}_k) \begin{pmatrix} c_1 & & & * \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_k \end{pmatrix}$$

$(c_1 c_2 \dots c_k \neq 0.)$

*(この $\mathbb{u}_1, \dots \mathbb{u}_k$ を得るための操作を**シュミットの直交化法**という。)*

定理 3.4. 有限次元計量ベクトル空間 V では

(1) 正規直交基底が存在する。
(2) 任意の正規直交系は正規直交基底に延長できる。
(3) 任意の直交系は直交基底に延長できる。