理工系線形代数学 NO.7 要約

今日のテーマ: **行列式 (2) 余因子と余因子行列**

今回は、行列 A を

$$A = (a_{ij})_{ij}$$

と成分表示する。すなわち A の i 行 j 列の成分 ($(A)_{ij}$ と書いているやつ) を A の小文字 a を使って、a_{ij} と表記することにする。

定義 7.1. 行列 A が与えられた時、その i 行と j 列を引っこ抜き, その行列式をとってついでに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを A の**余因子** (より正確には、ij-余因子) といい、A_{ij} で書き表す。

(※) A_{ij} と $(A)_{ij}$ とは全く意味が違うので注意。

補題 7.2. *A の 1 列目が基本列ベクトル $\mathbb{e}_i$ に等しいならば、$\det(A) = A_{i1}$. (もっと一般に、A の j 列目が $\mathbb{e}_i$ に等しいならば、$\det(A) = A_{ij}$.)*

補題 7.2 を踏まえて、余因子は別の言い方をしたほうが分かりやすいかも知れない:

補題 7.3. 一般の行列 A に対して

$$\det(A_{\lessdot}|_j \mathbb{e}_i) = A_{ij}$$

命題 7.4 (行列式の 1 列目に関する展開)**.** 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

が成り立つ。

Proof. A の 1 列目は $\sum_i a_{i1} \mathbb{e}_i$ と等しいから、

$$\det(A) = \det(A_{\lessdot}|_1 (\sum_i a_{i1} \mathbb{e}_i)) = \sum_i a_{i1} \det(A_{\lessdot}|_1 \mathbb{e}_i) = \sum_i a_{i1} A_{i1}$$

□

上の命題と同様にして、2 列目、3 列目,... n 列目に関する展開が得られる。

A の k 列目を $\mathbb{v}_k$ と書こう。交代性により、$k = 2, 3, \ldots, n$ に対して $\det(A_{\lessdot}|_1 (\mathbb{v}_k)) = 0$ である。このことから、つぎの結果を得ることができる。

命題 7.5. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i1} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, n)$$

が成り立つ。

これもまた、1 列目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える:

命題 7.6. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \qquad (\forall k, \forall m \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している:

命題 7.7. 任意の n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して、各 ij 成分が A の余因子 A_{ji} であるような行列 *(*i,j の順番に注意。*)* を $\tilde{A}$ と書くことにする。*(*$\tilde{A}$ のことを A の余因子行列とよぶ。*)* このとき、

$$A\tilde{A}=\det(A)\cdot 1_n$$

系 7.1. n 次正方行列 A が逆行列を持つことと、$\det(A)\neq 0$ とは同値である。

(注意) 命題 7.7 は逆行列の定義 (定義 5.1) の半分しか確かめていない。念のためもう片側も確かめておこう。

そのために行列 A の転置行列 ${}^tA$ を $({}^tA)_{ij}=A_{ij}$ で定義する。${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ 等々の性質が成り立つ。(教科書 p.14 参照)

$\det({}^tA)=\det(A)$ であり (このことの説明も必要だが、教科書の p.52 もしくはネットを参照のこと。),

$${}^tA\widetilde{{}^tA}=\det({}^tA)\cdot 1_n=\det(A)\cdot 1_n$$

両辺の転置行列を考えると

$${}^t(\widetilde{{}^tA})A=\det A\cdot 1_n$$

$\det(A)\neq 0$ なら $B=(\det A)^{-1}\cdot\tilde{A}$, $C=(\det A)^{-1}\cdot{}^t(\widetilde{{}^tA})$ とおいて、

$$AB=1_n, CA=1_n$$

となる正方行列 B,C があることがわかった。

$$B=1_n\cdot B=(CA)B=C(AB)=C\cdot 1_n=C$$

であるから、$B=C$ であって、これが A の逆行列である。