線形代数学 II 裏 NO.2 三角化、ジョルダンの標準型まとめ

〇本稿では一次写像の表現 (本講義の教科書 §5.5, p.126,p.127 あたり) をよく用いる。自信のない人はよく復習すること。

$A \in M_n(\mathbb{C})$ を n 次正方行列とする。 A と相似な行列で、できるだけ簡単なものを求めること、それが問題である。

0.1. **三角化.** A は三角行列と相似である。(No.10)

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である。

固有値は第一義的には固有ベクトルと対になって出てくる定義 (7.2) であったが、命題 7.3 の了解のもとで A の固有多項式 $f_A(x) = \det(xE_n - A)$ の根と再定義するのが重複度を込めて扱えるので良いのであった。

• 相似な行列 A, B の固有多項式 は等しい ($f_A = f_B$) ということ (8.2)、とくに固有値も等しいことに注意しておく。

• 三角行列の固有値は対角線を見れば良いことにも注意しておこう。これは行列式の直接な計算からすぐわかる。

• 実用的には三角化で十分なことも多い。つまり三角化は十分に強力である。とくに、ケーリーハミルトンの定理は三角化の知識だけで証明できる。(系 10.1)

0.2. **対角化.** 次のような仮定 B を考える。

(仮定 B):A の固有ベクトルだけからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する。

もし仮定 (B) が成り立てば、その基底を並べて作った行列 P を考えると、P は正則であり、 $D = P^{-1}AP$ は固有値を並べた対角行列である。すなわち A は対角化できる (8.2)。

他方で、仮定 (B) はいつでも成り立つわけではない。しかし、A の固有値がすべて異なるとき、すなわち f_A が重根をもたない場合には仮定 (B) が成り立つ。(系 8.1)

f_A が重根を持つような A の全体は、$f_A(x)$ と $f'_A(x)$ とが共通解を持つ A の全体に一致し、終結式の議論 (もしくはほかのいわゆる判別式の議論) をもちいればそのような A の全体が $M_n(A)$ のなかで「大変少ない」(Zariski 閉である。) ことがわかる。とくに、(B) をみたす (A) の全体は $M_n(\mathbb{C})$ の中で稠密な開集合 (open-dense) であり、測度の意味で言ってももっと素朴な意味で言ってもほとんど全ての行列 A は対角化可能である。(このような言い方をすると紛れるかもしれないので追記しておくと, このことは次のようなことと同様の言い方である: ほとんど全ての実数は整数ではない。つまり目をつぶって実数直線から一つ元を指さしたとき、その元はほとんどの場合整数ではない。)

0.3. **弱固有空間への分解.** 対角化可能とは限らないような A に対してはどうすればよいだろうか。A の固有値は、重複するものは並べてしまって、

$$(\underbrace{\lambda_1, \dots \lambda_1}_{e_1 \text{コ}}, \underbrace{\lambda_2, \dots \lambda_2}_{e_2 \text{コ}}, \underbrace{\lambda_3, \dots \lambda_3}_{e_3 \text{コ}}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots \lambda_s}_{e_s \text{コ}})$$

のように書ける。三角化すればつぎのような行列を得る:

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & * \\ & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_2 & \\ 0 & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

右上の半分は制御できていない部分 $(*)$ である。

0.3.1. 弱固有空間による分解. A の固有値 λ を一つとって固定しよう。A の弱固有空間 V_λ とその補空間 $W_\lambda = \mathrm{Image}(A-\lambda)^n$ を用いる。$\mathbb{C}^n$ を 2 つの空間の直和に分けることができる。(系 11.1) そこで $\mathbb{C}^n$ の基底として、V_λ の基底 $(\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_k)$ をまずもってきて、そのあとで W_λ の基底 $(\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \ldots, \mathbb{w}_{n-k})$ をもってきてそれらを全部ならべる、というのを考えることができる。それを用いて A を表現してみよう。つまり、例によって基底を並べた

$$P = (\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2 \ldots \mathbb{v}_k\mathbb{w}_1\mathbb{w}_2 \ldots \mathbb{w}_{n-k})$$

を考えて、$P^{-1}AP$ を考えるのである。$A \cdot V_\lambda \subset V_\lambda$, $A \cdot W_\lambda \subset W_\lambda$ ということがわかるから、それを参考にすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

とブロック区分けされる。すなわち A を小さい行列の直和 (13.1) に分けることができる。(No.11) ここで、A_1, B_1 は A をそれぞれ V_λ, W_λ に制限してできる線形写像を基底 $(\mathbb{v}_1\mathbb{v}_2 \ldots \mathbb{v}_k)$ と $(\mathbb{w}_1\mathbb{w}_2 \ldots \mathbb{w}_{n-k})$ で表現した行列である。定義により、A_1 は V_λ を λ-弱固有空間に持ち、$(A_1 - 1_k)^k = 0$ である。

A から、サイズの小さい A_1, B_1 に話をうつすことで、帰納法が使えて

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_s \end{pmatrix},$$

各 $A_i = \lambda_i 1_{e_i} + (\text{冪零行列})$ と書くことができる。

かくして話は冪零行列の標準型へとうつる。

0.4. **冪零行列の標準型.** 冪零行列 N といえども、とりあえず三角化はできる。N の固有値は必ず 0 であることに注意すると、N は 「上半三角で対角線が 0」の行列と相似である。よく考えると 「上半三角で対角線が 0」の行列は必ず冪零であり、冪零行列と相似な行列は必ず冪零であるから、この段階で結構な標準型を与えていると言えるだろう。もっと詳しくは No.12 のかたちまで行くわけだが、それは「環と加群」でのお楽しみとしておこう。