線形代数学 II 裏 NO.1 テンソル積とは

講義で「テンソル積とはなにか」という疑問を受けたが、これを短時間で説明するのは難しく、講義中に解説するのは本講義の趣旨とは異なってしまう。そこでここにちょっとだけ書いておくことにする。とりあえず、「エエカゲンバージョン」である。もし質問、誤植、希望等があれば土基までご連絡を。

1. ベクトル空間のテンソル積

1.1. **有限次元、基底の与えられたベクトル空間のテンソル積.** 以下、K を体とする。不慣れな $K=\mathbb{R}$ または $K=\mathbb{C}$ と考えてもよい。

定義 1.1. V ,W を K 上の有限次元ベクトル空間、$\{\mathbb{e}_1,\dots,\mathbb{e}_n\}, \{\mathbb{f}_1,\dots,\mathbb{f}_m\}$ をそれぞれ V,W の基底とする。$n=\dim V$, $m=\dim W$ である。このとき、形式的な元

$$\{\boxed{\mathbb{e}_i\otimes\mathbb{f}_j}; i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m\}$$

を基底とする nm 次元の K-ベクトル空間を $V\otimes W$ で書き表し、V と W のテンソル積と呼ぶ。言い換えれば、$V\otimes W$ とは形式的な和

$$\sum_{i,j} a_{ij}\boxed{\mathbb{e}_i\otimes\mathbb{f}_j} \qquad (a_{ij}\in K)$$

の集まりである。

例えば $n=2, m=3$ であれば

$$\boxed{\mathbb{e}_1\otimes\mathbb{f}_1},\ \boxed{\mathbb{e}_1\otimes\mathbb{f}_2},\ \boxed{\mathbb{e}_1\otimes\mathbb{f}_3},$$
$$\boxed{\mathbb{e}_2\otimes\mathbb{f}_1},\ \boxed{\mathbb{e}_2\otimes\mathbb{f}_2},\ \boxed{\mathbb{e}_2\otimes\mathbb{f}_3}$$

の 6 つの元を基底とするベクトル空間が $V\times W$ である。

四角で囲うのはいかにも大仰である。しかも $\boxed{\mathbb{e}_i\otimes\mathbb{f}_j}$ という記号は要するに i,j にしか関係しないので $\boxed{i,j}$ とでも書いておけばそのほうがラクなぐらいだ。下を参照のこと。

定義 1.2. V ,W を K 上の有限次元ベクトル空間、$\{\mathbb{e}_1,\dots,\mathbb{e}_n\}, \{\mathbb{f}_1,\dots,\mathbb{f}_m\}$ をそれぞれ V,W の基底とする。$\mathbb{v}\in V$ と $\mathbb{w}\in W$ のテンソル積 $\mathbb{v}\otimes\mathbb{w}$ が、次のように定義される

$$(\sum_i v_i\mathbb{e}_i)\otimes(\sum_j w_j\mathbb{f}_j) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j} v_iw_j\boxed{\mathbb{e}_i\otimes\mathbb{f}_j}$$

この定義に従えば、とくに

$$\mathbb{e}_i\otimes f_j=\boxed{\mathbb{e}_i\otimes\mathbb{f}_j}$$

であるから、四角で囲う必要がなくなる。

命題 1.3. $(\mathbb{v},\mathbb{w})\in V\times W\to V\otimes W$ は双線形である。すなわち、

(1) $(\mathbb{v}_1+\mathbb{v}_2)\otimes\mathbb{w}=\mathbb{v}_1\otimes\mathbb{w}+\mathbb{v}_2\otimes\mathbb{w} \qquad (\forall\mathbb{v}_1,\forall\mathbb{v}_2\in V,\forall\mathbb{w}\in W)$.
(2) $(c\mathbb{v})\otimes\mathbb{w}=c(\mathbb{v}\otimes\mathbb{w}) \qquad (\forall c\in K,\forall\mathbb{v}\in V,\forall\mathbb{w}\in W)$.
(3) $\mathbb{v}\otimes(\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2)=\mathbb{v}\otimes\mathbb{w}_1+\mathbb{v}\otimes\mathbb{w}_2 \qquad (\forall\mathbb{v}\in V,\forall\mathbb{w}_1,\forall\mathbb{w}_2\in W)$.
(4) $\mathbb{v}\otimes c\mathbb{w}=c(\mathbb{v}\otimes\mathbb{w}) \qquad (\forall c\in K,\forall\mathbb{v}\in V,\forall\mathbb{w}\in W)$.

これで、有限次元のベクトル空間のテンソル積については (基底さえとれば) おしまいである。

1.2. 基底のとり方を変えるとどうなるか. V の基底二組 $\{\mathbb{e}_i\}, \{\mathbb{e}'_j\}$ と W の基底二組 $\{\mathbb{f}_k\}\ \mathbb{f}'_l\}$ とがあったとする。

$$\mathbb{e}'_j = \sum_i p_{ij}\mathbb{e}_i \qquad \mathbb{f}'_l = \sum_k p_{kl}\mathbb{f}_k$$

$$\mathbb{e}'_j \otimes \mathbb{f}'_l = \sum_{i,k} p_{ij}q_{kl}(\mathbb{e}_i \otimes \mathbb{f}_k)$$

これがテンソル積の基底の変換則ということになる。

1.3. 抽象的な定義と一般の環上の加群のテンソル積. 実際にはテンソル積は基底に依らずに (若干抽象的に) 定義するのほうが現代的である。近頃は wikipedia にも定義はあるので興味のある人は参照のこと。

K のところを一般の環に置き換えれば、加群のテンソル積を定義するのはさほど難しくない。(ただし、その挙動はかなり体上の話とは異なる。)

1.4. 3 つ以上のベクトル空間のテンソル積. ベクトル空間 V_1, V_2, V_3 に対して、テンソル積 $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ などが定義される。これは $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ と同型であることがわかる。これを $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ と書く。4 つ以上のベクトル空間のテンソル積も同様に定義される。

2. ベクトル場 ETC のテンソル積

「テンソル」と呼ぶときにイメージするものは前節のテンソル積とはかなり違うかもしれない。どういうことなのか手短に書いておくことにする。「族」「場」という言葉で説明するが、実際の現場では「ファイバー束のセクション」だったり「層のセクション」だったりいろいろな扱いと呼ばれ方をする。

2.1. 族. 「族」について話す必要がある。多様体などの「空間」M を考える。各点 $x \in M$ 上に仮想的に人間がいると考えて、それぞれの人がそれぞれ独自に (別々に) 数学の問題を考えていることを想像するとよい。考える数学の内容は微分積分学、線形代数学など様々だが、今回は「ベクトル空間、その元、テンソル積、etc」を考えている図を想像する。(実際には x に関する連続性、可微分性 etc を満たすもののみを考えることが多い。)

一般に多様体 M に対して各点 $x \in M$ にベクトル空間 V_x が与えられているような状況を考える。これをベクトル空間の族とよび、$\{V_x \quad (x \in M)\}$ と書くことにする。($\{V_x \quad (x \in M)\}$ のことを以下では V と略すことがある。) さらに、各 $x \in M$ にたいして、V_x の元 v_x をそれぞれ与えたとき、$\{v_x (x \in M)\}$ を V の場とよぶ。

族 $V = \{V_x (x \in M)\}$ と同じように $W = \{W_x (x \in M)\}$ が与えられたとしたとき、新しい族

$$\{V_x \otimes W_x \qquad (x \in M)\}$$

を考えることができる。これが族 V と W のテンソル積である。

2.2. 反変、共変ベクトル. M の各点 x に対して、接空間 $T_x M$ を考えると、接ベクトル空間の族 $T_x M \quad (x \in M)$ を考えることができる。$v_x \in T_x M (x \in M)$ を接ベクトル場 ("反変ベクトル場") と呼ぶ。

M の各点 x に対して接空間 $T_x M$ の双対空間 $T_x^* M$ を考えることができる。これにより余接空間の族、余接ベクトル場を同様に定義できる。

$T_x M (x \in M)$ や $T^* x M (x \in M)$ のいくつかのテンソル積

$$(T_x M \otimes T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M) \otimes (T_x^* M \otimes T_x^* M \otimes \cdots \otimes T_x^* M)$$

を考えると、それはまたベクトル空間の族となり、各 x に対して

$$\mathbb{v}_x \in (T_xM \otimes T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM) \otimes (T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes \cdots \otimes T_x^*M)$$

を考えたものが、「テンソル」である。