線形代数学 II NO.11 要約

今日のテーマ: **弱固有空間による分解**

今回も引き続き、行列は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

定義 11.1. 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられているとする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$V_\lambda = \{\mathbb{v} \in \mathbb{C}^n | \ \exists N > 0 \text{ such that } (A - \lambda E_n)^N \mathbb{v} = \mathbf{0}\}$$

のことを A の λ に属する**弱固有空間** (λ-弱固有空間) と呼ぶ。

補題 11.2. (1) A の λ-弱固有空間が $\{0\}$ ではないなら、λ は A の固有値である。

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

定理 11.3. n 次正方行列 A が与えらているとする。このとき、$\mathbb{C}^n$ は A の弱固有空間の直和に分解される。すなわち、

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

定義 11.4. $\mathbb{C}[X]$ で、X を変数とする一変数複素係数多項式の全体の集合を表すことにする。

定理 11.3 の証明のためにつぎの事実を用いる。これは「環論」で話題になることの一つ (ユークリッドの互除法, Bézout の等式) であるが、ここでは間に合わせ的な証明をつけておく。

補題 11.5. $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ が与えられていて、$q(\lambda) \neq 0$ をみたすとする。このとき、任意の正の整数 N に対して、

$$a_N(X) \cdot (X - \lambda)^N + b_N(X) q(X) = 1$$

をみたす多項式 $a_N(X), b_N(X) \in \mathbb{C}[X]$ が存在する。

証明. $N = 1$ のとき:$q(X)$ を $(X - \lambda)$ で割った商を $\alpha(X)$, 余りを r と置くと、$r = q(\lambda)$ であり (剰余の定理)、

$$-\frac{\alpha(X)}{q(\lambda)}(X - \lambda) + \frac{1}{q(\lambda)} q(X) = 1.$$

これは $N = 1$ の場合にあたる。両辺の N 乗を整理することで一般の場合を得る。 □

系 11.1. A に対して、その固有多項式 $f_A(X)$ をとり、その根の一つ *(=*A *の固有値の一つ)* λ をとる。f_A を *(*部分的に*)* 因数分解して

$$f_A(X) = (X - \lambda)^k q(X) \qquad (q(\lambda) \neq 0)$$

と書こう。補題により

$$a(X) \cdot (X - \lambda)^k + b(X) q(X) = 1$$

を満たす $a, b \in \mathbb{C}[X]$ が存在する。このとき*:*

(1) $P = a(A)(A - \lambda E_n)^k$, $Q = b(A) q(A)$ とおくと、$P + Q = E_n, \quad PQ = 0$ を満たす。

(2) P*,* Q はともにべき等であり、$\mathrm{Image}\, Q$ 上では $(A - \lambda E_n)$ はべき零である。

(3) $\forall \mathbb{v} \in V_\lambda$ に対して、$Q\mathbb{v} = \mathbb{v}$.

(4) $\mathrm{Image}\, Q = V_\lambda$.