

## 環論 練習問題

言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。

今年度は一変数多項式の既約性の話をしなかったので、(難)のところは正しいと仮定しないと辛いだろう。

**問題 16.1.**  $m(X) = X^4 + X + 1$  とし、 $m$  の根の一つを  $\alpha$  とおく。  $\mathbb{Q}[X]$  から  $\mathbb{Q}[\alpha]$  への環準同型写像  $\varphi$  を  $\varphi(X) = \alpha$  となるように決める。このとき、

- (1)  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  に対して、 $\varphi(p)$  を求めよ。
- (2)  $m(X) \in \text{Ker}(\varphi)$  であることを示しなさい。
- (3) (難)  $m(X)$  は  $\mathbb{Q}[X]$  の既約元であることを示しなさい。
- (4)  $\text{Ker}(\varphi)$  の元は必ず  $m(X)$  で割り切れることを示しなさい。
- (5)  $\varphi$  に対して準同型定理を適用し、得られる環の同型を書きなさい。

**問題 16.2.**  $\beta = \sqrt[3]{6}$  とおく。  $\mathbb{Q}[X]$  から  $\mathbb{Q}[\beta]$  への環準同型写像  $\varphi$  を  $\varphi(X) = \beta$  となるように決める。このとき、

- (1)  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$  に対して、 $\varphi(p)$  を求めよ。
- (2)  $X^3 - 6 \in \text{Ker}(\varphi)$  であることを示しなさい。
- (3) (難)  $X^3 - 6$  は  $\mathbb{Q}[X]$  の既約元であることを示しなさい。
- (4)  $\text{Ker}(\varphi)$  の元は必ず  $X^3 - 6$  で割り切れることを示しなさい。
- (5)  $\varphi$  に対して準同型定理を適用し、得られる環の同型を書きなさい。