

環論 やってみよう問題 NO.11

出席番号、名前： \_\_\_\_\_

**問題 11.1.** 環  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  を考える。 $R$  の元  $z$  のノルム  $N(z)$  を  $N(z) = z\bar{z}$  で定義する。 $(\bar{z}$  は  $z$  の複素共役。 )  $N$  は次を満たす。

- $N(zw) = N(z)N(w)$  ( $\forall z, \forall w \in R$ ),
- $a|b \implies N(a)|N(b)$

このとき、次の各問いに答えなさい。

- (1)  $z$  が  $R$  の可逆元なら、 $N(z) = 1$  であることを証明しなさい。
- (2)  $2 \in R$  の  $R$  での約元は、 $\pm 1, \pm 2$  に限ることを証明しなさい。
- (3)  $2$  は  $R$  の素元ではないことを証明しなさい。
- (4) 参考 [今回はやらない]  $2$  はこれ以上  $R$  内では因数分解できない (既約元) である。

**問題 11.0.1.** 一行感想を述べてください。

答:

答は下の線より下にかくこと。多い場合は裏にまわっても良い。