理工系線形代数学 NO.10 要約

今日のテーマ: **ベクトル (2)**

定義 10.1. ベクトル空間の元 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が一次従属であるとは、非自明な1次の関係式

$$c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots +, c_n\mathbb{v}_n = 0 \qquad (c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R})$$

を満たすときにいう。$\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が一次従属でない時、一次独立であるという。

定義 10.2. ベクトル空間 V の元 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が V の基底であるとは、次の2つのことが成り立つときにいう。

(1) V の任意の元は $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ の線型結合で書ける。

(2) $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ は一次独立である。

n 個の元からなる基底が存在するようなベクトル空間を n 次元ベクトル空間という。

n 次元ベクトル空間 V をとろう。定義により V には n 個の元からなる基底 $\mathbb{v}_1,\ \mathbb{v}_2,\ \ldots,\ \mathbb{v}_n$ が存在する。V の元 $\mathbb{x}$ は $c_1\mathbb{v}_1 + c_2\mathbb{v}_2 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ と書くことができる。$\mathbb{x}$ に数ベクトル $[c_1, \ldots, c_n]$ を対応させることで、V を具体的な空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる。

補題 10.3. n 次元計量ベクトル空間 V については、次のような基底が存在する。*(正規直交基底)*

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

この基底を採用すると、ベクトルの内積は数ベクトルの標準内積に対応する。

一般の n 次元ベクトル空間 V	$\mathbb{R}^n$
基底 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$	基本ベクトル $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$
$\mathbb{v} = \sum_{i=1}^n c_n\mathbb{u}_i$	$[c_1, c_2, \ldots, c_n]$
内積	$[c_1, c_2, \ldots, c_n] \cdot [c'_1, \ldots, c'_n] = \sum_{i=1}^n c_i c'_i$