

理工系線形代数学 NO.6 要約

今日のテーマ:行列式

定義 6.1. (符号) $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列 σ が与えられているとする。 $1, 2, \dots, n$ を平面上に一直線上に並ぶように等間隔で並べて描き、その下にも 同じもののコピーを掻いておく。 1 と $\sigma(1), 2$ と $\sigma(2), \dots, n$ と $\sigma(n)$ とをそれぞれなめらかな曲線で結ぶ。(ただし三曲線が一点に会さないようにする。) このとき、曲線同士の交点の数の総数を n とおくと、

$$(-1)^n$$

は σ にしかよらない。この数を $\text{sgn}(\sigma)$ と書いて、 σ の符号と呼ぶことにする。

定義 6.2. 正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$$

(和は $\{1, 2, \dots, n\}$ の順列 σ 全てに渡る) のことを A の行列式という。

定義 6.3. $n \times 1$ -行列のことを、 n 次元列ベクトルともいう。行列 A と列ベクトル \mathbf{b} に対して、 $A|_i \mathbf{b}$ で「 A の i 番目の行ベクトルを \mathbf{b} に置き換えて得られる行列」を表すことにする。(ここだけの記号。)

命題 6.4. \det について、以下のことが成り立つ。

- (1) \det は**多重線形**である。すなわち、任意の正方行列 A 、任意の n 次元列ベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} と任意の実数 c_1, c_2 、任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ にたいして、

$$\det(A|_i(c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v})) = c_1 \det(A|_i \mathbf{u}) + c_2 \det(A|_i \mathbf{v})$$

が成り立つ。

- (2) \det は**交代的**である。すなわち、 A の列ベクトルに同じものが現れたら、必ず $\det(A) = 0$ である。
(2') \det は**符号交代的**である。すなわち、行列 A の2つの列をいれかえた行列を A' と書いたとき、 $\det(A) = -\det(A')$ が成り立つ。
(3) $\det(1_n) = 1$.

逆に、多重線形かつ交代的な写像 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、 $f(A) = f(1_n) \det(A)$ が成り立つ。

注意: 多重線形性 (1) の仮定のもとで、交代性 (2) と符号交代性 (2') とは同値である。