No.

Date

Witt環（Λ-環）

encyclopedia.org

$A \longmapsto \underbrace{\Lambda(A)}$

多くの環の直積

全部同型

J.S. Milne

Field theory「finite fields」

環Aの spectrum spec(A)

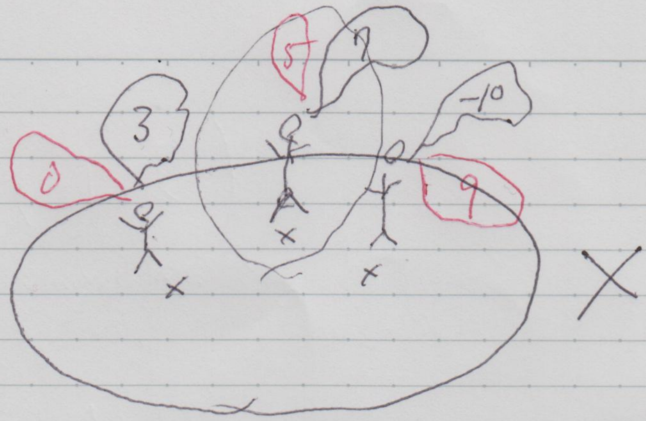
環A ⟷ 幾何学的な対象

Spec A

もと

$\underbrace{C(X)} \longleftarrow$ cpt空間 X

X上の複素数値
連続関数
の全体



$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

$C(X)$ は環

→ $C(X)$ は可換 C^*-代数

↑

X: cpt, Hausdorff

Gelfand の定理

A: 可換 C^*-代数 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ X: cpt Hausdorff 空間

$A \longmapsto \mathrm{Spec}(A)$ $(\mathrm{Spm}(A))$

DC.

$C(X) \longleftarrow\!\shortmid X$

No.

Date

A : 環

Aの1次元表現

$\Leftrightarrow$ $A \longrightarrow \mathbb{C}$ 環準同型

アイディアその1

Aの表現それぞれを全てとみる.

exercise 7.1

$\mathbb{F}_p$から $\mathbb{C}$ への環準同型は

存在しない

問題意識

環 A に対し、幾何学的な対象を (X)

つくれ.

一般の体 k への準同型を考える.
全

$$A \xrightarrow[\substack{\text{ring} \\ \text{hom.}}]{} k$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{ring hom } \varphi"] \arrow[d] & K \\ A/\ker\varphi \arrow[ur] \arrow[r, hook] & Q(A/\ker\varphi) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

体

商体

Aの素ideal

整域

$\ker\varphi$ がきまる.

・アイディア その2

Aの素ideal $\mathfrak{p}$ を Xの点と考える

$$A \to A/\mathfrak{p} \hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p})$$

体

Def. 7.1

$$\mathrm{Spec}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ は } A \text{ の素ideal}\}$$

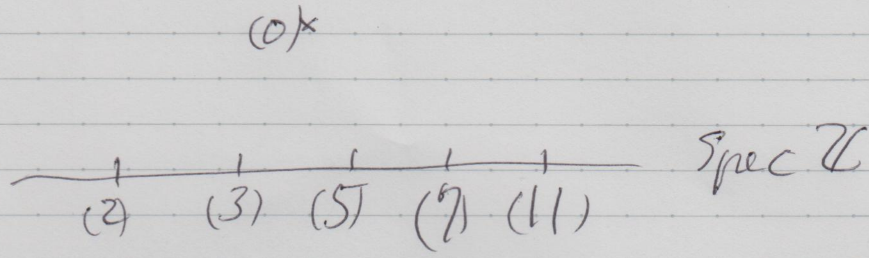
・構造をきめたい

- ・位相
- ・環付空間. (層 sheaf)

環 $A \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}$ は A の素ideal$\}$

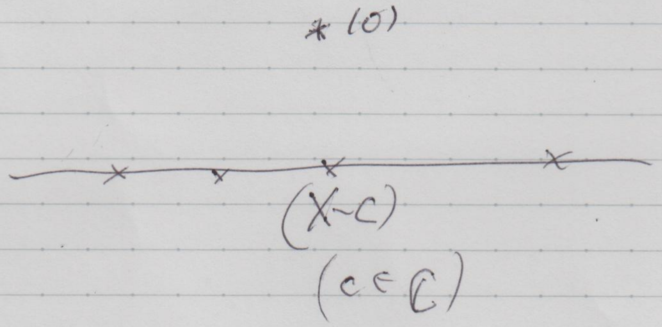
例

$A = \mathbb{Z}$　　$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p$ は素数$\} \cup \{(0)\}$



~~$A = \mathbb{R}[x]$~~

$A = \mathbb{C}[x]$　$\begin{cases} (f) & f : \mathbb{C} \text{ 上キヤク} \to f(x) = x - c \\ (0) & \end{cases}$



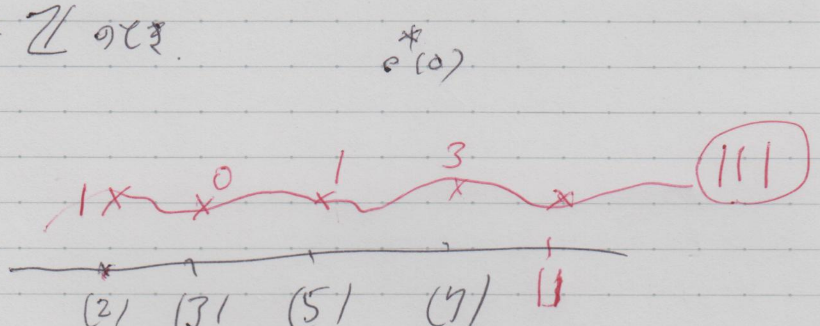
飯高茂　代数幾何学　イワナミ

$A \supset \mathfrak{p}$
$\rotatebox{90}{$\in$}$
$\mathrm{Spec}\,A$

$\rightsquigarrow \quad A \to A/\mathfrak{p} \hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p})$ 体

$\mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}$

$A = \mathbb{Z}$ のとき



Spec A の位相

$f \in A$ に対し

$$V(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,A \mid \mathrm{eval}_{\mathfrak{p}}(f) = 0\}$$

を Spec A の閉集合の1つとして扱う

$f_1, \dots, f_\ell$ に対し $\quad V(f_1, \dots, f_\ell) = \{\mathfrak{p} \mid \mathrm{eval}_{f_j}(\mathfrak{p}) = 0 \ \forall j\}$
$\rotatebox{90}{$\in$}$
A

Exercise 7.2 $\{V(f_1, \dots, f_\ell) \mid f_1, \dots, f_\ell \in A\}$
は閉集合を与える.