線形代数学 II やってみよう問題 NO.4 の解答から。

計量ベクトル空間 V とその部分空間 U が与えられているとし、$\mathbb{v} \in V \setminus U$ とする。このとき、

(5) U が n 次元で、正規直交基底 $\mathbb{u}_1, \dots, \mathbb{u}_n$ をもつとき、$\mathbb{v}_U$ と $\mathbb{v}_{U^\perp}$ とを求めよ。

[下書き用紙で考えること]

$\mathbb{v}_U$ が存在すると仮定する。$\mathbb{v}_U$ は U の元であるから、

$$\mathbb{v}_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{u}_i \qquad (\exists a_i \in \mathbb{R}).$$

$$(\mathbb{v} - \mathbb{v}_U) \perp \mathbb{u}_j (j = 1, 2, \dots, n)$$

ここから、

$$(\mathbb{v}, \mathbb{u}_j) = a_j (\forall j)$$

よって、

$$\mathbb{v}_U = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{v}, \mathbb{u}_i) \mathbb{u}_i \tag{4.1}$$

でなければならない。ここで (4.1) 式が答えと即断してはいけない。それどころか、上の部分は解答用紙に書く必要が全くない。(答えを思いつくのには必要。)

(5 の答)

$$\mathbb{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{v}, \mathbb{u}_i) \mathbb{u}_i \tag{4.2}$$

とおく。

- $\mathbb{x} \in U$ (←理由が一行必要),
- $(\mathbb{v} - \mathbb{x}) \perp U$ (←内積の計算が一行必要)

が確かめられるから、$\mathbb{v}_U = \mathbb{x}$. $\mathbb{v}_{U^\perp} = \mathbb{v} - \mathbb{v}_U$.