環論 練習問題

言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がもっと大事である。

今年度は一変数多項式の既約性の話をしなかったので、(難) のところは正しいと仮定しないと辛いだろう。

問題 16.1. $m(X) = X^4 + X + 1$ とし、m の根の一つを α とおく。$\mathbb{Q}[X]$ から $\mathbb{Q}[\alpha]$ への環準同型写像 φ を $\varphi(X) = \alpha$ となるように決める。このとき、

(1) $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ に対して、$\varphi(p)$ を求めよ。
(2) $m(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ であることを示しなさい。
(3) (難) $m(X)$ は $\mathbb{Q}[X]$ の既約元であることを示しなさい。
(4) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の元は必ず $m(X)$ で割り切れることを示しなさい。
(5) φ に対して準同型定理を適用し、得られる環の同型を書きなさい。

問題 16.2. $\beta = \sqrt[3]{6}$ とおく。$\mathbb{Q}[X]$ から $\mathbb{Q}[\beta]$ への環準同型写像 φ を $\varphi(X) = \beta$ となるように決める。このとき、

(1) $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ に対して、$\varphi(p)$ を求めよ。
(2) $X^3 - 6 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ であることを示しなさい。
(3) (難) $X^3 - 6$ は $\mathbb{Q}[X]$ の既約元であることを示しなさい。
(4) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の元は必ず $X^3 - 6$ で割り切れることを示しなさい。
(5) φ に対して準同型定理を適用し、得られる環の同型を書きなさい。