環論 NO.10 要約 (裏)

この「裏」では講義では触れないちょっとした内容について書く。今回は、「非可換な環」をちょっと覗き見る。

定義 10.1. R は環であるとする。R の元のうち、積に関して可逆なものを R の**可逆元**と言い、その全体を $R^\times$ であらわす。

$$R^\times = \{x \in R; \exists y \in R \text{ に対して } xy = yx = 1 \text{ が成り立つ }\}$$

例 10.2. $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}[X]^\times = \mathbb{C}^\times$.

補題 10.3. 可換環 R の元 x について、次は同値である。

(1) $x \in R^\times$
(2) $(x) = R$

R が非可換の場合には、事情はだいぶと異なる。

(1) R の部分集合 S で生成される左イデアルは

$$RS = \{\sum_{i,\text{ 有限和}} r_i s_i | r_i \in R, s_i \in S\}$$

である。同様に S で生成される右イデアルは SR である。

(2) R の部分集合 S で生成されるイデアルは

$$RSR = \{\sum_{i,\text{ 有限和}} r_i s_i t_i | r_i, t_i \in R, s_i \in S\}$$

である。

(3) x が可逆元でなくても、(零因子であっても), $RxR = R$ となることは珍しくない。たとえば $R = M_2(\mathbb{R}), x = \mathrm{diagonal}(1, 0)$ など。

(4) x が左逆元 a をもつ $(ax = 1)$ からといって、 x が右逆元を持つとは限らない。例えば、$V = \mathbb{R}[X]$, $R = \{f : V \to V, \text{線形写像}\}$ $a = \frac{d}{dX}$, $x = \int_0^X$. (すなわち

$$a : V \ni f \mapsto \frac{d}{dX}(f) \in V$$

$$x : V \ni f \mapsto (\int_0^X f) \in V$$