

理工系線形代数学 NO.14 要約

今日のテーマ: 行列の対角化。

命題 14.1. n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の固有ベクトル $P = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$ に対して、 $AP = P \cdot \text{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ が成り立つ。とくに $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が、一次独立ならば、 P は可逆で、

$$(\star) \quad P^{-1}AP = \text{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

が成り立つ。(\star) を A の対角化という。

命題 14.2. P を n 次の正方行列、 P は可逆だとする。このとき、任意の n 次正方行列 A_1, A_2 に対して次のことがなりたつ。

- (1) $P^{-1}(c_1A_1 + c_2A_2)P = c_1P^{-1}A_1P + c_2P^{-1}A_2P$. ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).
- (2) $P^{-1}(A_1A_2)P = P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P$.

命題 14.3. A, P を n 次の正方行列、 P は可逆だとする。 $B = P^{-1}AP$ とおくと、 B が対角行列であるか否かにかかわらず、

- (1) 任意の多項式 $f(x)$ に対して、
 - (a) $P^{-1}f(A)P = f(B)$
 - (b) $\det(f(A)) = \det(f(B))$.
 - (c) A の固有多項式と B の固有多項式は等しい。
- (2) とくに、 $P^{-1}AP = \text{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のときには、
 - (a) $f(A) = P \text{diagonal}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) P^{-1}$.
 - (b) $\det(f(A)) = f(\lambda_1) \cdots f(\lambda_n)$.
 - (c) A の固有多項式は $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ と等しい。

*上の命題の極限を考えることにより、行列の \exp, \sin, \cos も同様に計算することができる。これは微分方程式の解法などでとくに有用である。

命題 14.4. n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k$ があつたとする。もし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ がどれも異なれば、 $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k$ は一次独立である。

系 14.1. n 次正方行列 A の n 個の固有値が実数で、互いに相異なれば、 A は対角化可能である。

*話を複素数にまで拡張しておくと、つぎのように単純化される。

系 14.2. n 次複素正方行列 A の n 個の固有値が互いに相異なれば、 A は対角化可能である。

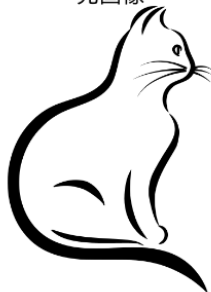
* 行列 $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値は $0, 0, 0$ で、固有ベクトルは ${}^t[1, 0, 0]$ の一つだ

けである。よって N は対角化できない。 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3 + N$ の固有値は $2, 2, 2$

で、対角化できない。一般の、対角化不可能な行列については、座標変換で「ジョルダンの標準形」までは持っていくことができる。詳しくは線形代数の進んだ成書を参考のこと。

いくつかの猫の絵を線形変換で移してみた。(猫の絵は <https://pixabay.com/vectors/cat-cool-remeras-helical-helix-1294968/> から借用。ライセンスはそちらを参照のこと)

元画像



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



元画像



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$



元画像



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

