

巡回拡大

まずは今までの復習 $+\alpha$ から。

定理 12.1. 体 K の有限次ガロア拡大 L が与えられたとする。 $G = \text{Gal}(L/K)$ とおく。このとき、

- (1) L と K の間の中間体 M と、 G の部分群 H とが一対一に対応する。
- (2) M は K のガロア拡大である $\Leftrightarrow H$ は G の正規部分群。

定義 12.2. L は体 K の有限次代数拡大体であるとする。

- (1) L が K のアーベル拡大であるとは、 L が K のガロア拡大であって、 $\text{Gal}(L/K)$ がアーベル群 (=可換群) のときに言う。
- (2) L が K の巡回拡大であるとは、 L が K のガロア拡大であって、 $\text{Gal}(L/K)$ が巡回群のときに言う。

定義 12.3. n は正の整数であるとする。 L は体 K の有限次代数拡大体で、 $[L : K] = n$ とする。さらに、 1 の n 乗根が n 個 K の中に含まれているとする。このとき、

- (1) $a \in K$ で、 $X^n - a$ が K 上既約であったとする。このとき $X^n - a$ の根の一つ α をとって、 $L = K(\alpha)$ とおけば、 L は K の n 次巡回拡大である。
- (2) K の n 次巡回拡大体は上のようなものに限る。