体論要約 NO.10

[ガロア対応の証明]

体 K のガロア拡大 L が与えられているとする。$G=\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群 H に対して、

$$\mathcal{F}(H)=\{x\in L; g.x=x(\forall g\in H)\}(=L^H)$$

と定義する。L と K の中間体 M に対して、

$$\mathcal{G}(M)=\{g\in G; g.x=x(\forall x\in M)\}(=\mathrm{Gal}(L/M))$$

と定義する。この時、次のことが成り立つ。(単調減少性)

(1) G の任意の部分群 H_1,H_2 に対して、

$$H_1\subset H_2 \implies \mathcal{F}(H_1)\supset\mathcal{F}(H_2).$$

(2) L/K の任意の中間体 M_1,M_2 に対して、

$$M_1\subset M_2 \implies \mathcal{G}(M_1)\supset\mathcal{G}(M_2).$$

(3) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H))\supset H.$$

(4) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M))\supset M.$$

実は、上の (1)-(4) から、全く形式的な計算で次のことが成り立つことがわかる。
(”3 回=1 回”)

(1) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(H)))=\mathcal{F}(H).$$

(2) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)))=\mathcal{G}(M).$$

ガロア理論では、さらに次のことが分かる。(狭義単調減少性)

(1) G の任意の部分群 H_1,H_2 に対して、

$$H_1\subset H_2,\mathcal{F}(H_1)=\mathcal{F}(H_2) \implies H_1=H_2$$

(補題 9.2 による。)

(2) L/K の任意の中間体 M_1,M_2 に対して、

$$M_1\subset M_2,\mathcal{G}(M_1)=\mathcal{G}(M_2) \implies M_1=M_2.$$

(ガロアの等式による。)

このことから、最後に次のことが分かる。
(”2 回=0 回”)

(1) G の任意の部分群 H にたいして、

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(H))=H.$$

(2) L/K の任意の中間体 M に対して、

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(M))=M.$$