代数学 IA NO.14 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 群の集合への作用と表現

定義 14.1. 群 G の集合 X への作用とは、次のような条件を満たす写像

$$G \times X \ni (g, x) \to g.x \in X$$

のことである。

(1) $(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x)$ $(\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X)$.
(2) $e.x = x$ $(\forall x \in X)$.

例 14.2. 群 G と、その部分群 H が与えられたとき、G は G/H に

$$g.[x] = [gx]$$

により作用する。($[x]$ は $x \in G$ の G/H でのクラス).

例 14.3. 群 G の G への作用を次の三種類定義することができる。

(1) $g.x = gx$. (左作用)
(2) $g.x = x(g^{-1})$. (右作用)
(3) $g.x = gxg^{-1}$. (共役による作用).

例 14.4. 有限群 G が与えられているとき、$X = \{G$ の部分群 $\}$ への G の作用が

$$g.H = gHg^{-1}$$

により決められる。更に、正の整数 n に対して、$X_n = \{H \in X; |H| = n\}$ とおくと、G は上記と同じ定義式により X_n にも作用する。

補題 14.5. 群 G が有限集合 X に作用しているとする。このとき G から $\mathfrak{S}_n$ ($n = \#X$) への群準同型が $G \ni g \mapsto [x \mapsto g.x] \in \mathfrak{S}_n$ により定まる。

命題 14.6. 群 G が有限集合 X に作用しているとする。このとき:

(1) X に同値関係 $\sim$ が、

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ such that } g.x_1 = x_2$$

で定まる。$\sim$ に関して x と同値なものの全体を、x の G-軌道という。

(2) x の G-軌道は、$G.x = \{g.x; g \in G\}$ に等しく、G/G_x と同一視できる。ここで、$G_x = \{g \in G; g.x = x\}$ は x の固定群と呼ばれる G の部分群である。

(3) $|G| = \sum_{\text{orbit}} |G|/|G_x|$.

定義 14.7. 素数 p が与えられているとする。有限群 G に対して、G の p-シロー群 P とは

(1) P は G の部分群である。
(2) P の位数は p のべき p^k である。
(3) $\frac{|G|}{p^k}$ は p で割り切れない。

が成り立つときにいう。

一般に、任意の有限群 G と任意の素数 p に対して、G の p-シロー群が存在する。(シローの定理) ここでは、Milne のテキスト `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html` を参考にした証明を述べる。なお、シローの定理はさらにいくつかの結果を合わせ

たものを指すのが普通であるが、それについては、群論の進んだ成書か、上記 Milne のテキストを参照のこと。

命題 14.8. 有限群 G の部分群 H と、G の p-シロー群 P に対して、G/P につぎのようなクラス分けを導入する。

$$[g_1] \sim [g_2] \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ such that } [h.g_1] = [g_2].$$

このとき、

(1) $[g_1] \in G/P$ と同じクラスであるような G の元の個数は $|H|/|H \cap g_1 P g_1^{-1}|$ である。
(2) $|G|/|P| = \sum_\lambda |H|/|H \cap g_1 P g_1^{-1}|$
(3) とくに、H にも p-シロー群が存在する。

一般の群 G に対してシローの定理を証明するには、確実にシロー部分群をもつような群 G' に G を埋め込めば良い。そのような群の例としては 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の一般線形群などもあるが、それには少しだけ体論の知識を必要とする。ここでは G を $\mathfrak{S}_{p^n}$ に埋め込むことを考えよう。n を大きく取れば埋め込みを作ることは易しい。$\mathfrak{S}_{p^n}$ の p-シロー群は、つぎのように存在する。

命題 14.9.

$$A = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \prod_{j=0}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}((\mathbb{Z}/pZ)^j, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\}$$

とおき、

$$H = \left\{ \varphi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n ; \begin{array}{c} \exists \alpha \in A \text{ such that} \\ \varphi(i_1, i_2, \ldots, i_n)_j = i_j + \alpha_{j-1}(i_1, \ldots, i_{j-1}) \\ (j = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right\}$$

と定義する。このとき:

(1) $|H| \subset \mathfrak{S}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n)$.
(2) $|H| = \#A = p^{1+p+p^2+\ldots p^{n-1}}$.

系 14.10. H は $\mathfrak{S}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の p-シロー群である。