

線形代数学 II NO.9 要約

今日のテーマ: 行列の対角化。

今回も引き続き、行列は複素数体 \mathbb{C} 上で考える。

- (1) n 次正方行列 A に対して、 A の固有多項式 $\det(xE_n - A)$ の根が A の固有値。
- (2) λ が A の固有値 $\Leftrightarrow (A - \lambda E_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つ。この解が A の (固有値 λ に属する) 固有ベクトルである。
- (3) $k \leq n$ に対して、

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

という等式を得たならば、それらを並べる (連結する) ことができる。じっさい、 $P = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \dots \mathbf{x}_k)$ をもちいて、

$$AP = PD \quad (\text{但し } D = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k))$$

と書ける。ここのところは、

$$\mathbf{x}_i \xrightarrow{A} A\mathbf{x}_i$$

が P により、

$$\mathbf{e}_i \xrightarrow{D} \lambda_i\mathbf{e}_i$$

と比べられることを意味している。

- (4) とくに、 A の固有ベクトルたちで、 n 個の一次独立なものが見つかれば、 A を対角化できる。