

線形代数学 II NO.3 要約

今日のテーマ: 直交基底。正規直交基底

定義 3.1. 内積を持つベクトル空間を 計量ベクトル空間 と呼ぶのであった。計量ベクトル空間 V の $\mathbf{0}$ でない元の集合 $\{v_i\}_{i=1}^n$ が

- (1) 直交系であるとは、すべての $i \neq j$ にたいし、 $v_i \cdot v_j = 0$ を満たすときにいう。
- (2) 正規直交系であるとは、直交系であって、すべての i に対し $\|v_i\| = 1$ のときにいう。

補題 3.2. a_1, \dots, a_k が一次独立のとき、次のような直交系 b_1, \dots, b_k が一意に存在する。

$$(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k) \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & & \dots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

定理 3.3. a_1, \dots, a_k が一次独立のとき、次のような正規直交系 u_1, \dots, u_k が一意に存在する。

$$(a_1, \dots, a_k) = (u_1, \dots, u_k) \begin{pmatrix} c_1 & & * \\ & c_2 & \\ & & \dots \\ 0 & & & c_k \end{pmatrix}$$

($c_1 c_2 \dots c_k \neq 0$.)

(この u_1, \dots, u_k を得るための操作をシュミットの直交化法という。)

定理 3.4. 有限次元計量ベクトル空間 V では

- (1) 正規直交基底が存在する。
- (2) 任意の正規直交系は正規直交基底に延長できる。
- (3) 任意の直交系は直交基底に延長できる。