微分積分学基礎 NO.15

例題 15.1. $e^{x^2}\sin(x)$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開し、x の 5 乗の項まで (つまり $O(x^6)$ の誤差項を許して) 計算したものを例にならって書け。
例:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

例題 15.2.

$$\int_2^\infty \frac{\log(t)}{t^3}dt$$

を求めよ。

例題 15.3.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-5x}}{(1+e^{-5x})}dx$$

をもとめよ。

15.1

$$\begin{aligned}
&e^{x^2}\sin(x)\\
=&(1+x^2+\frac{x^4}{2}+O(x^6))(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^6))\\
=&x+\frac{5x^3}{6}+\frac{41x^5}{120}+O(x^7)
\end{aligned}$$

15.2

$$\left(\frac{\log(t)}{t^2}\right)'=\frac{1}{t^3}-2\frac{\log(t)}{t^3}$$

ゆえ、

$$\int\frac{\log(t)}{t^3}dt=-\frac{1}{4t^2}-\frac{\log(t)}{2t^2}$$

$$\int_2^\infty\frac{\log(t)}{t^3}dt=\frac{1}{16}+\frac{\log(2)}{8}$$

15.3

$$\int_0^\infty\frac{e^{-5x}}{(1+e^{-5x})}dx$$

$t=1+e^{-5x}$ とおく。 $dt=-5e^{-5x}dx$ であり、$x=0$ のとき $t=2$. そこから x を増加させて ∞ まで動くとき、 t は単調に減少して 1 まで動くから、

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\frac{e^{-5x}}{(1+e^{-5x})}dx\\
=&-\frac{1}{5}\int_2^1\frac{1}{t}dt\\
=&\frac{1}{5}\int_1^2\frac{1}{t}dt\\
=&\frac{1}{5}\left[\log(t)\right]_1^2\\
=&\frac{\log(2)}{5}
\end{aligned}$$