微分積分学基礎 NO.12 要約

今日のテーマ:**積分の正値性**

命題 12.1 (積分の線形性)**.** $[a,b]$ で定義された連続関数 f,g と実数 c に対して、次のことが成り立つ。

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

言うまでもないことだが、不定積分 etc も線形性をもつ。

命題 12.2 (定積分の正値性)**.** $[a,b]$ 上で連続な関数 f にたいして、$f(x)\geq 0$ $(\forall x\in[a,b])$ なら、

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

系 12.3. (1) $[a,b]$ 上で連続な関数 f,g にたいして、$f(x)\geq g(x)$ $(\forall x\in[a,b])$ なら、

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(2) $[a,b]$ 上で連続な関数 f と、定数 m,M にたいして、$m\leq f(x)\leq M$ $(\forall x\in[a,b])$ なら、

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(3) $[a,b]$ 上で連続な関数 f にたいして、$|f(x)|\leq M$ $(\forall x\in[a,b])$ なら、

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(4) $[a,b]$ 上で連続な関数 f と定数 M にたいして、$|f(x)|\leq M$ $(\forall x\in[a,b])$ なら、

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M(b-a)$$

上記系をうまく用いることで下の定理の左辺を評価できる。

定理 12.4. f が C^{n+1}-級であるとき、

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

詳細は例題の形にしておく:

例題 12.5. f は $\mathbb{R}$ 上の C^{n+1} 級関数であるとする。 非負の整数 n に対して,

$$I_n = \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

と定義する。つぎの問いに答えよ。

(1) 部分積分を用いて, I_n と I_{n-1} の関係を書け。

(2) I_0 を求めよ。
(3) $f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ を I_n を用いて書け。
(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^n}$ を求めよ。

(解答)
(1)

$$\begin{aligned}I_n=&\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\\ =&[(x-t)^n f^{(n)}(t)]_0^x - n\int (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt\\ =&-x^n f^{(n)}(0)-nI_{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに,

$$I_n=-x^n f^{(n)}(0)-nI_{n-1}.$$

(2) $I_0=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$.
(3) (1) の両辺を $n!$ で割って,

$$\frac{I_n}{n!}=-\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)-\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$$

よって,

$$\frac{I_n}{n!}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(n)+I_0$$

(2) の結果を用いてまとめると

$$\begin{aligned}f(x)=&f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{I_n}{n!}\\ =&\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\frac{I_n}{n!}\end{aligned}$$

つまり

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(n)=\frac{I_n}{n!}$$

(4)
$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}{x^n}=\frac{I_n}{n!x^n}$ の $x\to 0$ の極限を求めたい。 $|x|<1/2$ として十分である。f は C^{n+1} 級であるから $f^{(n+1)}$ は $[-1/2,1/2]$ で有界である。$|f|$ の $[-1/2,1/2]$ での上界の一つを M とおくと,

$$|I_n|\le|\int_0^x|(x-t)^n||f^{(n+1)}(t)|dt|\le|x||x|^n M$$

よって $\frac{I_n}{n!x^n}\to 0$.