微分積分学基礎 NO.5 要約

今日のテーマ:**微分**

定理 5.1. 実数 a を含む区間上で定義された関数 f, g にたいして、もし f, g が a で微分可能ならば、次が成り立つ。

(1) 定数 c に対し、 $(cf)'(a) = c \cdot (f'(a))$.
(2) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
(3) $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
(4) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
(5) $g(a) \neq 0$ ならば、 $(1/g)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$.
(6) $g(a) \neq 0$ ならば、 $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

定理 5.2. 実数 a を含む区間上で定義された関数 f と、$f(a)$ を含む区間上で定義された関数 g にたいして、次が成り立つ。

$$(g(f(x)))'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

定理 5.3. 実数 a を含む区間上で定義された単調関数 f が与えられているとする。f が a で微分可能で、$f'(a) \neq 0$ なら、f の逆写像 g に対して、

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

が成り立つ。

合成関数や逆関数の微分は概念的にはそれほど難しいところはないが、なれないと実際の計算には戸惑うことが多い。

例 5.4. (逆関数の微分の例)

(1) $\log(x)' = \frac{1}{x}$.
(2) $(\mathrm{Tan}^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.
(3) $(\mathrm{Sin}^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

微分はいくつかの「基本的なもの」を覚えておけば後はかなり機械的に計算できる。

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathrm{Sin}^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Tan}^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$