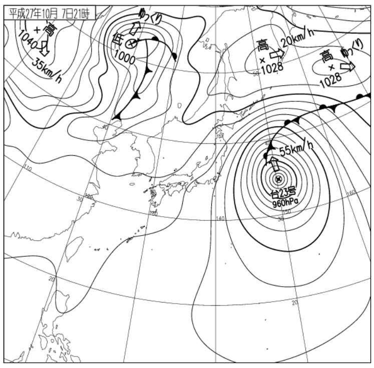
微分積分学基礎 NO.1 要約

今日のテーマ:実数
関数の概念：

定義 1.1. 集合 X 上の実数値関数 f とは、X の各元 x に対して、その値 $f(x)$ が (誰がやっても正しくやる限りはただひとつ) 定まっている時にいう。



「ある時刻での気圧」は平面の領域上の関数とみなせる。
→多変数関数や関数列を扱う必要が生じる。
ただし、まずは数列や、一変数関数を扱うのが基本になる。

定義 1.2. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

定理 1.3. 次の不等式が成り立つ。

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $-|x| \leq x \leq |x|$.
(2) ($\boxed{\text{三角不等式}}$) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$|x+y| \leq |x| + |y|$.

定義 1.4. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

以下、この講義では、整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、**不等号**。を自由に用いる。その他、実数の完備性というのも用いるのであるが、それについては次回以降。

数列

定義 1.5. $\mathbb{Z}_{>0}$ 上の関数を数列という。数列のことを $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ と書いたり、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書いたりする。

単に数列と言ったときには、有限数列は考えない。他方で、「(添字が)0 から始まる数列」なども場合によっては考えることがあるが、それについては臨機応変に。

◎有界

定義 1.6. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**有界**であるとは、ある実数 M_1, M_2 があって、どのような $x \in S$ に対しても $M_1 \leq x \leq M_2$ を満たすときに言う。
(2) 実数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは、それを $\mathbb{R}$ の部分集合と見て有界であるときに言う。
(3) 集合 X 上の関数 f が**有界**であるとは、値集合 $\{f(x)\}_{x \in X}$ が有界であるときにいう。

(2) は (3) の特別の場合とも見ることができる。(3) については次回以降に解説する。

◎極限

定義 1.7. 数列 $\{a_n\}$ は、ある実数 a にたいして、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \text{ such that } (n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

をみたすとき、a に**収束する** という。$\{a_n\}$ が a に収束するとき、その収束する先 a は一つに定まる。そこでこの値のことを $\{a_n\}$ の $n \to \infty$ のときの**極限**とよび、

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

と表す。

命題 1.8. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束すると仮定する。このとき、

(1)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$$

(2)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$$

(3)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n$$

(4) さらに $\lim_n b_n \neq 0$ を仮定すると、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ で、

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n / \lim_{n \to \infty} b_n$$