Non-commutative Kähler projective space: from commutative viewpoint.

“土基” “non-commutative” で $\boxed{\text{検索}}$
dailymotion の動画もあります。

やったこと

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は実多様体としては symplectic(Kähler) 多様体.
$\downarrow$

- 非可換版をを作りました。
- コホモロジーとスペクトル系列を計算しました。
- 可換理論の援用で計算が整理できました。

実から見た複素構造と変数

$$(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathbb{P}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{P}^n \times \bar{\mathbb{P}}^n$$

X_i	$\bar{X}_i$	変数 (斉次座標)
E_i	$\bar{E}_i$	微分形式

$$E_i = dX_i, \bar{E}_i = d\bar{X}_i. \ (d = \partial + \bar{\partial}.)$$

↓「非可換化」(斉次座標レベルでは正準量子化。)

$$[\bar{X}_i, X_j] = hC\delta_{ij} \quad \text{(Kronecker's delta)},$$
$$[\bar{X}_i, \bar{X}_j] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0.$$
$$[\bar{E}_i, E_j]_+ = Chk\delta_{ij}$$
$$[\bar{E}_i, \bar{E}_j]_+ = 0, \qquad [E_i, E_j]_+ = 0, \qquad C: \ \text{central}.$$

→ Weyl-Clifford 環 WC

非可換構造と WC

$\mathbb{P}^n \times \bar{\mathbb{P}}^n$ を WC の加工物として構成する。
根拠: Marsden Weinstein quotient.

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}^{n+1} \times \bar{\mathbb{A}}^{n+1} \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^n \times \bar{\mathbb{P}}^n \end{array}$$

$$\mathrm{WC} = \Bbbk[X, \bar{X}, E, \bar{E}]$$

$\mathbb{G}_m \times \bar{\mathbb{G}}_m$ での quotient

Marsden-Weinstein quotient

WC の subquotient

$$\mathcal{WC}/(\mu)$$

結論: $\mathcal{WC}/(\mu)$ を考えれば良い。

ステレオ加群

$\mathsf{WC} = \Bbbk[X, \bar{X}, E, \bar{E}]$ を「Stereo 加群」として捉える。
左変数は左から、右変数は右から
$\Bbbk[X, E] \curvearrowright \mathsf{WC} \curvearrowleft \Bbbk[\bar{X}, \bar{E}]$
$\to$ WC は可換環 $\Bbbk[X, E] \otimes \Bbbk[\bar{X}, \bar{E}]$ 上の加群とみなせる。
$\to$ 加群の層としては可換理論ですね。

($\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の形をしたものの特徴。)

$\tilde{\Omega}$ と $\tilde{\bar{\Omega}}$

- $\mathcal{WC}$ は Dolbeault 複体と似ている。
- ただし、 form として、$\Omega_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{P}^n}$ のみではすこし足らない。
- $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ のファイバー方向の微分形式が残る。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n+1} \times \bar{\mathbb{A}}^{n+1} & \Omega \boxtimes \bar{\Omega} & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi\times\pi} & \downarrow & \\ \mathbb{P}^n \times \bar{\mathbb{P}}^n & \tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}} & = (\pi \times \pi)_*(\Omega_{\mathbb{A}^{n+1}} \boxtimes \bar{\Omega}_{\mathbb{A}^{n+1}})^{\mathbb{G}_m} \end{array}$$

$$\mathcal{WC} \cong \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{\Omega} \boxtimes \tilde{\bar{\Omega}}(-l, -l) \qquad (\leftarrow C \text{ の分})$$

局所的に書くと

$\{X_0 \neq 0\}$ に於いては、

$$\Omega_{\mathbb{P}^n} \leftrightarrow \Bbbk[x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n]$$
$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1} dX_0, x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n]$$

sparse differential forms

$$\Omega_{\mathbb{P}^n} \leftrightarrow \Bbbk[x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n]$$

$$\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \leftrightarrow \Bbbk[x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^{p-1}dx_1, \dots, x_n^{p-1}dx_n]$$

$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1}dX_0, x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n]$$

$$\widetilde{\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}}} \leftrightarrow \Bbbk[X_0^{-1}dX_0, x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^{p-1}dx_1, \dots, x_n^{p-1}dx_n]$$

Deligne-Illusie-Cartier 理論の簡単な場合として

$$\Omega_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\Omega_{\mathbb{P}^n})$$

$$\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n,\mathrm{sparse}} \cong \mathcal{H}(\widetilde{\Omega}_{\mathbb{P}^n})$$

$\mathfrak{d}$ と $\bar{\mathfrak{d}}$

WC の 代数としての微分は $\partial, \bar{\partial}$ とは少し異なる。

$$\mathfrak{d} = -k \otimes \bar{I}_0 + \partial \otimes 1$$

$$\bar{\mathfrak{d}} = -I_0 \otimes k + 1 \otimes \bar{\partial}$$

$I_0, \bar{I}_0$: Euler vector field との interior product.

環 $\mathcal{A}$ と $\mathfrak{A}$

ここから基礎体の標数 $p > 0$ と仮定する。
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathrm{WC}/(\mu_0 - kC)$
$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathrm{WC}/(\mu_0 - kC, \sum X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1})C^p)$
ただし、
$\mu_0 = \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{d}}(\sum_i X_i \bar{X}_i) = k \sum_i X_i \bar{X}_i + \sum_i E_i \bar{E}_i$.
$\sum X_i^p \bar{X}_i^p - (1 - h^{p-1})C^p)$ は $\mathcal{A}$ の k-torsion.

- $\mathcal{A}, \mathfrak{A}$ は double complex.

→ コホモロジーは?

- コホモロジー的には $\mathcal{A}$ は $WC/(kC)$ (に対応する層) と大差ない。(moment map で切る部分は実はそれほど効いてこない。

あるスペクトル系列

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$: アーベル圏, $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$: left-exact additive functor.
このとき

$$E_2 = R^i_{d_1} F(H^j_{d_2}(M)) \implies E_\infty = R^{i+j} F(\mathrm{Tot}(M^{\bullet\bullet})).$$

- 本来は "derived category の derived category" を考えたい。

コホモロジーとスペクトル系列の計算。

一般論的に得られるスペクトル系列:

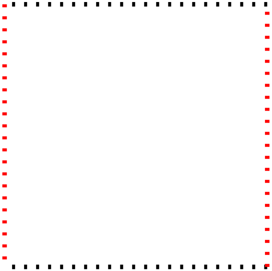
$$E_2 = R_{\mathfrak{d}}\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n; \mathcal{H}_{\bar{\mathfrak{d}}}(\mathfrak{A})) \implies E_\infty = R^\bullet_{\mathfrak{d}+\bar{\mathfrak{d}}}\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, (\mathfrak{A})).$$

今の場合には次のように計算される:

$$E_2 = H^\bullet(\mathbb{P}^n, \Omega^\bullet_{\text{sparse}}) \otimes H^\bullet(\mathbb{P}^n, \Omega^\bullet_{\text{sparse}}[d\log \bar{X}_V])$$
$$\cong \Bbbk[L_2]/(L_2^n) \otimes \Bbbk[\bar{L}_n]/(\bar{L}_n^2)$$
$$\implies E_\infty = R^i\Gamma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n, \Omega^\bullet_{\text{sparse}} \boxtimes \Omega^\bullet_{\text{sparse}}[d\log(X_U\bar{X}_V)])$$

$(\deg(L_2) = 2, \deg(L_n) = n.)$
spectral sequence は E_2 で退化。

スペクトル列の図解:
E_2 項: 黒い点線。
別の E_2 項を取ると赤い点線にもなる。



Thank you.

ありがとうございました。

おまけ

一般の variety V では:
$\mathcal{WC}, \mathcal{A}, \mathfrak{A}$ を $(I_V^p, \bar{I}_V^p)$ で割ったものを取り扱う。
form の部分は可換の場合のように V だけで処理はできない。