NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.30 要約

30. Ultrafilter による標数 0 への移行

この件についても何度も書いている。

`http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/TALK/kaehler3/kaehler3.pdf`

(`kaehler3.pdf`) を参照のこと。Web からリンクをたどるには、土基のページ (日本語版) →古いページとたどって、広島大学 (2014/11/05) での「話したり、話したかったことのノート」に行くとよい。

ultra product の話になるわけだが、この話は affine scheme の理論を使えばかなり整理することができる。

基本的な主張と注意

集合 Λ によって index つけられた 体の族 $\{K_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ を考える。

(1) 直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ をとる。
  (a) $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアルは Λ の filter と一対一に対応する。
  (b) $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ の素イデアルは必ず極大であり、極大イデアルは Λ の極大フィルターと一対一に対応する。

(2) $\mathrm{Spec}(\prod_{\lambda\in\lambda} K_\lambda)$ は Λ に離散位相を入れたものの最大コンパクト化 (Stone-Čech コンパクト化) と同相である。

(3) $\mathfrak{U}$ における 超積 $K_\mathfrak{U}$ は $\mathrm{Spec}(\prod_\lambda K_\lambda)$ における structure sheaf の stalk と一致する。したがって、「"limit"」 とこれまで土基が呼んできたものは germ と呼べばよい。

(4) $K_\mathfrak{U}$ は体である。K_λ の 標数 $\mathrm{char}(K_\lambda)$ が $\lambda \to \mathfrak{U}$ の極限で ∞ に収束するなら、$K_\mathfrak{U}$ の標数は 0 である。

(5) Λ としては素数全体の集合 P をとり、 K_λ としては $\mathbb{F}_p$ を考えるというのが土基の基本的なやり方であった。もちろんそれ以外でもよい。

(6) K_λ としてすべて体 $\mathbb{R}$ を採用すれば、超準解析の世界が出現する。(ただし、完全に超準解析をするためには、論理の超準化も必要になる。論理を moduli 空間の相互関係のように捉えれば、論理の超準化も理解しやすいかもしれない。)

Stone-Čech compact 化については wiki を参照のこと。

`https://en.wikipedia.org/wiki/Stone%E2%80%93%C4%8Cech_compactification`

言いたいことの (結果だけだが) 半分ぐらいは書いてあった。

(2) (a) の対応は、次のように定義される:

$\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアル I にたいして $\mathcal{F}_I = \{V(f); f \in I\}$ を対応させ、Λ のフィルター $\mathcal{F}$ に対しては、$\prod_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ のイデアル $I_\mathcal{F} = \{f; V(f) \in \mathcal{F}\}$ を対応させる。ただし、$f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_\lambda K_\lambda$ に対して、$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in \Lambda; f_\lambda = 0\}$ である。

$$\chi_f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\text{if } f_\lambda \neq 0 \\ 0 & (\text{if } f_\lambda = 0 \end{cases}$$

とおけば、 $f \in I \Leftrightarrow \chi_f \in I$ であり、この性質を用いても (2)(a) の 対応を記述できる。

(2)(b) の前半の証明の肝: I が素イデアルだとする。$A, B \in \Lambda$, $A \coprod B = \Lambda$ とすると、$\chi_A + \chi_B = 1, \chi_A \chi_B = 0$ ゆえ、$\chi_A \in I$ or $\chi_B \in I$.