NON COMMUTAVIE PROJECTIVE SPACE AS A NON-COMMUTATIVE KÄHLER MANIFOLD NO.014
要約

14. 選択 1: 微分

微分形式の理論を考えるにあたって、微分形式の微分をどう扱うかは基本的である。ここでは $\partial, \bar{\partial}$ の 2 つの微分を導入したい。まず $\mathbb{A}^{n+1}$ の「座標環」に「form を付け加えた」環 S (仮名) を作りたい。

$\mathbb{k}_1$ を可換環, $h \in \mathbb{k}_1$ とする。

(仮説 0.) S は $\mathbb{k}_1$ 上の super 代数である。余談であるが S の元については super 代数の標準的な記法をもちいる。例えば $[\bullet, \bullet]$ は交換子ではなく super 交換子であり、$\hat{\bullet}$ のように hat は $\bullet$ の parity を表す。

(仮説 1.) 変数 $x_0, \ldots, x_n, \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n$ は (非斉次) 正準交換関係 **(ccr)** を満たす。つまり、非斉次 Weyl 環 $\mathrm{weyl}_{n+1} = \mathbb{k}\langle x_0, \ldots x_n, \bar{x}_0, \ldots \bar{x}_n\rangle/(\mathrm{ccr})$ から始める。我々の扱いたい環 S は weyl_{n+1} の拡大環である。

(仮説 2.) S は **2 つの odd 微分 $\partial, \bar{\partial}$ の作用を受ける**。すなわち、$\partial, \bar{\partial}$ はともに S から S への $\mathbb{k}_1$-線形写像であり、(super) Leibnitz 則

$$\partial(ab) = \partial(a)b + (-1)^{\hat{b}} a \partial b$$

$$\bar{\partial}(ab) = \bar{\partial}(a)b + (-1)^{\hat{b}} a \bar{\partial} b$$

を満たす。($\hat{b}$ は b の parity.)

(仮説 3.) $\partial x_0, \ldots \partial x_n$ のことを $e_0, \ldots, e_n$, $\bar{\partial} x_0, \ldots \bar{\partial} x_n$ のことを $\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n$ と書く。 $e_0, \ldots, e_n$, $\bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n$ は **(acr)** を満たす。

$$[e_i, \bar{e}_j]_+ = k_1 \delta_{ij}, \quad [e_i, e_j]_+ = 0, \quad [e_i, \bar{e}_j]_+ = 0,$$

(さらに、標数 2 の場合には $e_i^2 = 0, \bar{e}_i^2 = 0$ を仮定する。)

(仮説 4.) (**コーシー・リーマン**) $\bar{\partial} x_i = 0, \partial \bar{x}_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

(仮説 5.) e_i と x_j とはおのおの可換である。同様に $\bar{e}_i$ と $\bar{x}_j$ ともおのおの可換である。

('bar 無し' だけの世界、'bar 付き' だけの世界はそれぞれ可換の多項式環上の通常の微分形式の世界である。)

(帰結 6.) x_i と $\bar{e}_i$ とは可換である。これは (ccr) を ∂ や $\bar{\partial}$ で作用させてみればわかる。

$$0 = \partial(h\delta_{ij}) = \partial[x_i, \bar{x}_j] = [e_i, \bar{x}_j]$$

等々。

(帰結 7.) 任意の i, j にたいして、

$$0 = \partial[x_i, \bar{e}_j] = [e_i, \bar{e}_j] + [x_i, \partial \bar{e}_j].$$

ゆえに、

$$[x_i, \partial \bar{e}_j] = -\delta_{ij} k_1$$

とくに、$\partial \bar{e}_j (= \partial \bar{\partial} x_j) \neq 0$.

(仮説8.) ある k が存在して、$k_1 = hk$, $\partial \bar{\partial} \bar{x}_i = k \bar{x}_i$ $(\forall i)$.

(帰結 8.) $\partial, \bar{\partial}$ は「定数倍を除けば inner」 である。

$$\partial = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \qquad \bar{\partial} = -\frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$

(帰結 9.)

$$[\bar{\partial}, \partial] = \frac{1}{h^2}\,\mathrm{ad}([\sum_i \bar{x}_i e_i, \sum_j x_j \bar{e}_j) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\partial(\sum_j x_j \bar{e}_j)) = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(k\sum_j x_j \bar{x}_j + \sum_j e_j \bar{e}_j)$$

ここでの結論

$\mathbb{A}^{n+1}$ 上の微分形式全体の空間の非可換対応物として、非斉次 Weyl 環と非斉次 Clifford 環のテンソル積

$$S = \Bbbk_1\langle x_0, \ldots, x_n, \bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n, e_0, \ldots, e_n, \bar{e}_0, \ldots, \bar{e}_n\rangle/(\mathrm{ccr},\ \mathrm{acr})$$

をとり、S の微分としては

$$\partial = \frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i \bar{x}_i e_i), \qquad \bar{\partial} = -\frac{1}{h}\,\mathrm{ad}(\sum_i x_i \bar{e}_i)$$

を採用する。

(注意)

$$\sum_i \bar{x}_i e_i = \partial(\sum_i x_i \bar{x}_i), \qquad \sum_i x_i \bar{e}_i = \bar{\partial}(\sum_i x_i \bar{x}_i),$$

(補足)

(仮説 8) はまだ唐突に過ぎたかもしれない。実際には、次のような仮説 (8a-c) を立ててそこから (仮説 8) を導くべきだろう:

(仮説 8a) $\partial^2 = 0$, $\bar{\partial}^2 = 0$.

(仮説 8b) $\partial, \bar{\partial}$ は「変数ごとに」考えてよい。つまり、もともと n-変数 Weyl-Clifford 代数は 1 変数のもののテンソル積であるが、$\partial, \bar{\partial}$ はそれぞれの 1 変数 Weyl Clifford 代数ごとに定義されていて、そのテンソル積として表される。

(仮説 8c) (1)-(7) と (8a,8b) から $\partial \bar{e} = \bar{x} + \mathrm{const.}$ のかたちが得られるが、x 変数の平行移動により原点を調整して、constant の部分は 0 と考える。この (8c) は定数の数を増やすのを防ぐための便宜上の工夫と言ったほうが良いかもしれないが、このために constant の部分に現れうる元を限定しすぎている可能性もある。