代数学 III 要約 NO.13

ガロア対応の例

例 13.1. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}, \omega)$,　$K = \mathbb{Q}$. (但し $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$). L は K のガロア拡大である。ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元としては

$$a : \begin{cases} \sqrt[3]{11} & \mapsto \sqrt[3]{11}\omega \\ \omega & \mapsto \omega \end{cases}, \qquad b : \begin{cases} \sqrt[3]{11} & \mapsto \sqrt[3]{11} \\ \omega & \mapsto \omega^2 \end{cases}$$

で定義される a, b がとれて、

$$a^3 = e, \quad b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

を満たす。ゆえに、

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_3 \qquad (3\,\text{次の対称群}).$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに:

- 位数 2 のもの 3 つ。($\{e, b\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, a^b\}$).
- 位数 3 のもの 1 つ ($\{e, a, a^2\}$)。

それらに対応する中間体は

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega^2), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega)$.
- $\mathbb{Q}(\omega)$.

例 13.2. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$,　$K = \mathbb{Q}$. (但し $i = \sqrt{-1}$.) L は K のガロア拡大である。ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元としては

$$a : \begin{cases} \sqrt[4]{3} & \mapsto \sqrt[4]{3}i \\ i & \mapsto i \end{cases}, \qquad b : \begin{cases} \sqrt[4]{3} & \mapsto \sqrt[4]{3} \\ i & \mapsto -i \end{cases}$$

で定義される a, b がとれて、

$$a^4 = e, \quad b^2 = e, \quad b^{-1}ab = a^{-1}.$$

を満たす。ゆえに、

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{D}_4 \qquad (\text{二面体群})$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに:

- 位数 2 のもの 5 つ。($\{e, a^2\}$, $\{e, b\}$, $\{e, ab\}$, $\{e, a^2b\}$, $\{e, a^3b\}$).
- 位数 4 のもの 3 つ。($\{e, a, a^2, a^3\}$, $\{e, a^2, b, a^2b\}$, $\{e, a^2, ab, a^3b\}$).

それらに対応する中間体は

- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}(1-i))$. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}(1+i))$,
- $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$.

問題 13.1. $\zeta_5 = \cos(2\pi/5) + \sqrt{-1}\sin(2\pi/5)$ とおく (1 の 5 乗根)。$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5)$ と $\mathbb{Q}$ のあいだの中間体で、$\mathbb{Q}$ 上拡大次数が 5 のものを 2 つ以上求めよ。

◎ 二重根号

$\alpha = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ とおく。このとき、

(1) α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $m(X) = (X^2-3)^2 - 2$ である。
(2) $m(X)$ の最小分解体 L は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ を部分体として含む。
(3) ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の元 σ で、$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\sigma(\sqrt{7}) = -\sqrt{7}$ を満たすものが存在する。
(4) $\sigma^2 \neq \mathrm{id}$.
(5) $[L : \mathbb{Q}] = 8$ で、$L \supsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$.
(6) $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_k})$ を満たすような $k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$ は存在しない。