代数学 IA NO.13 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 群の直積 (+準同型定理の応用)

定義 13.1 (群の直積)**.** $(G_1, \spadesuit)$ と、$(G_2, \heartsuit)$ とが共に群であるとする。このとき、デカルト積集合

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2); \quad g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$$

は、次のような演算 $\diamondsuit$ により群になる。

$$(a_1, a_2) \diamondsuit (b_1, b_2) = (a_1 \spadesuit b_1, a_2 \heartsuit b_2)$$

$(G_1 \times G_2, \diamondsuit)$ を G_1 と G_2 の (群としての) 直積と呼ぶ。

例 13.2. (直積群の例)

(1) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{(a,b) | a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$ は加法 $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ に関して群になる。

(2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の加法の構造は $\mathbb{R}$ の加法群と $\mathbb{R}$ の加法群の直積としての構造であると考えることもできる。

定理 13.3 (有限巡回群の直積分解)**.** m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、同型

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

が存在する。

系 13.4. m, n を互いに素な整数とすると、

$$am + bn = 1$$

となる整数 a, b が存在する。

この系自身もよく利用される。応用例として一つだけ挙げておく。

系 13.5 (系の系)**.** m, n を互いに素な正の整数とする。このとき、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の、$\bar{n}$ で生成される部分群は、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 自身である。

◎群と群準同型の作り方について。

(1) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ から 群 H への群準同型を作るには、H の元 h ("1 の行き先") で、$h^n = e_H$ をみたすものを作ればよい。

(2) 上のことは、次のように一般化できる。正の整数 n に対して、
   - (a) n 個の元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ で生成される自由群 $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ が存在する。F_1 は $(\mathbb{Z}, +)$ と同型である。(1 が x_1 の役割をする。)
   - (b) F_n から他の群への群準同型を与えることは、$x_1, \dots x_n$ の行き先を与えることと同じである。
   - (c) n 個の元で生成された群

     $$G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n; (\text{関係式})_1, \dots (\text{関係式})_m \rangle$$

     は、F_n を、$(\text{関係式})_1, \dots (\text{関係式})_m$ (の "g" を "x" で置き換えたもの) で生成された正規部分群 N で割った剰余群と同型である。
   - (d) G から H への群準同型は、$x_1, \dots, x_n$ の行き先 $h_1, \dots, h_n$ で、$(\text{関係式})_1, \dots (\text{関係式})_m$ (の "g" を "h" で置き換えたもの) が成り立つものを与えれば良い。

問題

(I) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は 巡回群ではないことを証明しなさい。