

今日のテーマ 部分群

群の部分群とは、部分集合であって群になっているものである。
ただし、部分群の掛け算はもとの群の掛け算と一致しなければならない。

部分群の定義に入る前に、群の定義から直ちに導かれる性質についていくつか述べてみよう。以下では G の演算 $x \circ y$ を単に xy と書くことにする。

定理 2.1. G は群であるとする。このとき、

- (1) G の単位元はただ一つである。
- (2) G の元 x を一つとってくると、その逆元はただ一つである。(これを普通 x^{-1} と書く。)
- (3) $x \in G$ に対して、 $(x^{-1})^{-1} = x$ が成り立つ。
- (4) $a, b, c \in G$ が $ab = cb$ を満たすなら、必ず $a = c$ が成り立つ。
- (5) 任意の $a, b \in G$ に対して、 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つ。
- (6) 任意の $a, b, c, d \in G$ に対して、

$$((ab)c)d = (ab)(cd) = a(b(cd)) = a((bc)d) = (a(bc))d$$

が成り立つ。すなわち 4 つの元のかげ算は a, b, c, d の順番のみに依り、かけ算の順番には依らない。(この積のことを普通単に $abcd$ と書く) (もっとたくさんの元の積についても同様のことが成り立つ。)

定義 2.2 (群の元のべき乗). G を群、 x をその一つの元とする。

- (1) 自然数 n に対して、 x^n (《 x の n -乗》) は帰納的に次のように定義される。

$$x^0 = e \text{ (単位元),}$$

$$x^{n+1} = x^n x$$

- (2) n が負の整数のときには、 x^n は x^{-n} の逆元として定義する。

定理 2.3. $x^m x^n = x^{m+n}$

さて、本題に入る。部分群の正確な定義は次のようになる。

定義 2.4 (部分群の定義). 群 (G, \circ) が与えられているとする。 G の部分集合 H が G の部分群であるとは、次の条件を満たすときに言う。(部分群 0) 掛け算 $\circ: G \times G \rightarrow G$ を $H \times H$ に制限すると、これは H に値を持つ。すなわち、次のような写像が誘導される。

$$\circ: H \times H \rightarrow H$$

(部分群 1) (H, \circ) は群である。

条件 (部分群 0) は次のように言い換えても良い。
(部分群 0') h, k を H から任意に取ってくると、いつでも $h \circ k$ は H の元である。

例 2.5. 次の集合はそれぞれ $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ の部分群である。

- (1) \mathbb{Q}^\times 自身。
- (2) $\{1\}$.
- (3) $\{\pm 1\}$.
- (4) $\{2^n; n \in \mathbb{Z}\} (= \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\})$
- (5) $\{2^m 3^n; m, n \in \mathbb{Z}\}$

演算が可換で、+記号でかけられるような群のことを加法群とか加群と呼ぶのであった。加法群 A の (加法に関する) 単位元のことは 0 と書き、 A の元 x の加法に関する逆元は $-x$ と書くのが普通である。 nx ($n \in \mathbb{Z}$) など、想像がつくだろう。

例 2.6. 次の集合はそれぞれ $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群である。

- (1) \mathbb{Z} 自身。
- (2) $\{0\}$.
- (3) 偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$.
- (4) 3 の倍数全体の集合 $3\mathbb{Z}$.

例 2.7. 次の集合はどれも群 $(\mathbb{Z}, +)$ の部分群 ではない。

- (1) 奇数全体の集合 $2\mathbb{Z} + 1$.
- (2) $\{\pm 1\}$.

定理 2.8. G の部分群 H が与えられたとする。このとき H の単位元は G の単位元と一致し、 H の元 h の H での逆元は G での逆元と一致する。

定理 2.9. 群 G の部分集合 H が G の部分群であるためには、次の三条件が満足されることが必要十分である。

- (1) $a, b \in H \implies ab \in H$
- (2) $e \in H$
- (3) $a \in H \implies a^{-1} \in H$

定理 2.10. (今回は証明の一部だけをやる。) \mathbb{Z} の部分群は必ず

$$n\mathbb{Z} \quad (= n \text{ の倍数の集合}) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

のどれかである。(もちろん、 $n\mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} の部分群になっている。)

問題

- (I) $S = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$ は実数の乗法群 $(\mathbb{R}^\times, \times)$ の部分集合だが部分群ではないことを示しなさい。