理工系線形代数学 NO.9 要約

今日のテーマ: **ベクトル**

実数直線も、$W_0 = \left\{ t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$ も、「同じ形」をしている。このような2つを同時に扱うのには、成分を見るのではなく、和と、スカラー倍という道具のみを用いて記述することが大事になる。例えば、成分がすべて 0 のベクトル (0 ベクトル) は $\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{v}$ の解と見ることもできる。

定義 9.1. V が $\mathbb{R}$ 上の**ベクトル空間**であるとは、つぎの性質を満たしているときにいう。

O (演算の存在) V には、和と、$\mathbb{R}$ の元による定数倍が定義されている。

I
(1) $\forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}, \forall \mathbf{z} \in V$ にたいし、$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$.
(2) $\exists \mathbf{0} \in V$ があって、 $\forall x \in V$ にたいし、$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}, \quad \mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{0}$ がなりたつ。
(3) $\forall \mathbf{x} \in V$ に対して、$\exists \mathbf{y} \in V$ が存在して、$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{y}+\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が成り立つ。
(4) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ にたいして $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ が成り立つ.

II
(5) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \mathbf{x} \in V \ (c_1c_2)\mathbf{x} = c_1.(c_2.\mathbf{x})$.
(6) $\forall \mathbf{x} \in V \ 1.\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

III
(7) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \forall \mathbf{x} \in V \ (c_1+c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{x}$
(8) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ c(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{x}+c\mathbf{y}$.

定義 9.2. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V があるとする。V の2つの元 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に対して、内積と呼ばれる実数 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ が定義されて、次の性質をみたすとき、V のことを計量ベクトル空間と呼ぶ。

(1) 多重線形性: $(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{w} = c_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}) + c_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w})$ $(\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in V)$
(2) 対称性: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$. $(\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V)$
(3) 正定値性: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ $(\forall \mathbf{v} \in V)$. 等号は $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ のときのみ。

計量ベクトル空間の元 $\mathbf{u}$ にたいして、$\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ のことを $\mathbf{u}$ の長さといい、$|\mathbf{u}|$ とかく。

補題 9.3. 計量ベクトル空間の元 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して、次が成り立つ。

(1) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.
(2) $|(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. とくに $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ なる θ が存在する。これを $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角と呼ぶ。

定義 9.4. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間が2次元であるとは、V に2つの元 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が存在して、次の性質を持つときにいう。

(1) V のどの元も $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の線型結合で書ける。
(2) $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
(3) $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ を満たすような実数 c は存在しない。

(このとき $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は V の基底であるという。)

上の (2),(3) は「 $c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}=\mathbf{0}$ を満たす実数の組 (c_1, c_2) は $(0,0)$ 以外には存在しない」というのと同じである。この条件が満足されるとき、「$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ は一次独立である」という。

補題 9.5. 二次元計量ベクトル空間 V については、次のような基底が存在する。*(正規直交基底)*

$$|\mathbf{u}| = 1, \quad |\mathbf{v}| = 1, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$