理工系線形代数学 NO.7 要約

今日のテーマ:**行列式 (2)**

命題 7.1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。

定義 7.2. 行列 A が与えられた時、その i 行と j 列を引っこ抜き, その行列式をとってついでに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを A の余因子といい、A_{ij} で書き表す。

補題 7.3. A の 1 列目が基本列ベクトル e_i に等しいならば、$\det(A) = A_{i1}$.

(もっと一般に、A の j 列目が e_i に等しいならば、$\det(A) = A_{ij}$.)

命題 7.4 (行列式の 1 行目に関する展開)**.** 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

が成り立つ。

上の命題と同様にして、2 行目、3 行目,... n 行目に関する展開が得られる。A を、「A の 1 列目を A の k 列目に置き換えた行列」に置き換えることにより、つぎの結果を得ることができる。

命題 7.5. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{1j} = 0 \qquad (k = 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

これもまた、1 行目だけについて特別に言えることではなく、結局次のことが言える:

命題 7.6. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{mj} = \delta_{km} \det(A) \qquad (\forall k, \forall m \in \{1, 2, \dots, n\})$$

が成り立つ。

この式は次のことを意味している:

命題 7.7 (クラーメルの公式)**.** 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、各 ij 成分が A の余因 A_{ji} であるような行列 *(i, j の順番に注意。)* を $\tilde{A}$ と書くことにする。*($\tilde{A}$ のことを A の余因子行列とよぶ。)* このとき、

$$A\tilde{A} = \det(A)$$

系 7.1. n 次正方行列 A が逆行列を持つことと、$\det(A) \neq 0$ とは同値である。