理工系線形代数学 NO.6 要約

今日のテーマ:**行列式**

定義 6.1. (符号) $\{1, 2, \ldots, n\}$ の順列 σ が与えれらているとする。$1, 2 \ldots, n$ を平面上に一直線上に並ぶように等間隔で並べて描き、その下にも 同じもののコピーを掻いておく。1 と $\sigma(1)$,2 と $\sigma(2)$,..., n と $\sigma(n)$ とをそれぞれなめらかな曲線で結ぶ。(ただし三曲線が一点に会さないようにする。) このとき、曲線同士の交点の数の総数を n とおくと、

$$(-1)^n$$

は σ にしかよらない。この数を $\operatorname{sgn}(\sigma)$ と書いて、σ の符号と呼ぶことにする。

定義 6.2. 正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdot \cdots \cdot a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$$

(和は $\{1, 2, \ldots\}$ の順列 σ 全てに渡る) のことを A の行列式という。

命題 6.3. det について、以下のことが成り立つ。

(1) det は**多重線形**である。すなわち、A, B, C の 3 つがどれも 1 列目以外が一致する行列で、A, B, C の 1 列目をそれぞれ $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ と書いた時、 $c_1\mathbb{u} + c_2\mathbb{v} = \mathbb{w}$ を満たすならば、$\det(c_1 A + c_2 B) = \det(C)$ が成り立つ。また、「1 列目」 を 2 列目等に置き換えても同様のことが成り立つ。

(2) det は**交代的**である。すなわち、A の列ベクトルに同じものが現れたなら、必ず $\det(A) = 0$ である。

(3) $\det(1_n) = 1.$

逆に、多重線形かつ交代的な写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ が与えられたとき、$f(A) = f(1_n)\det(A)$ が成り立つ。

注意: 多重線形性の仮定のもとで、交代性から、「行列 A の 2 つの列をいれかえた行列を A' と書いたとき、 $\det(A) = -\det(A')$ が成り立つ。」ということをいうことができる。

命題 6.4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が任意の $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。

定義 6.5. 行列 A が与えられた時、その i 行と j 列を引っこ抜き, その行列式をとってついでに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけたものを A の余因子といい、A_{ij} で書き表す。

補題 6.6. A の 1 列目が基本列ベクトル e_i に等しいならば、$\det(A) = A_{i1}$.

(もっと一般に、A の j 列目が e_i に等しいならば、$\det(A) = A_{ij}$.)

命題 6.7. 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

が成り立つ。