微分積分学基礎 NO.14 要約

今日のテーマ:**ガウス積分**
次の等式はいろいろなところに出没するので取り上げておく。

定理 14.1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ここではこれを (若干反則気味だが) 次のことを用いて説明する。

定理 14.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1) dx_2 = \pi$$

この等式の左辺は $y = e^{-x^2}$ を y 軸に関して回転させた回転体の体積に等しい。よって、

補題 14.3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_1) dx_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{-\log(y)})^2 dy$$

系 14.4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで、$n!!$ は n の二重階乗と呼ばれるもので、n から 2 つづつ下がって 1 に至るまでの積である。$(-1)!! = 1$ に注意。