微分積分学基礎 NO.2 要約

今日のテーマ:数列

定義 2.1. $\mathbb{Z}_{>0}$ 上の関数を数列という。数列のことを $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ と書いたり、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書いたりする。

単に数列と言ったときには、有限数列は考えない。他方で、「(添字が)0 から始まる数列」なども場合によっては考えることがあるが、それについては臨機応変に。

◎有界

定義 2.2. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 S が**有界**であるとは、ある実数 M_1, M_2 があって、どのような $x \in S$ に対しても $M_1 \leq x \leq M_2$ を満たすときに言う。
(2) 実数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは、それを $\mathbb{R}$ の部分集合と見て有界であるときに言う。
(3) 集合 X 上の関数 f が**有界**であるとは、値集合 $\{f(x)\}_{x \in X}$ が有界であるときにいう。

(2) は (3) の特別の場合とも見ることができる。(3) については次回以降に解説する。

◎極限

定義 2.3. 数列 $\{a_n\}$ は、ある実数 a にたいして、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \text{ such that } (n > N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

をみたすとき、a に**収束する** という。$\{a_n\}$ が a に収束するとき、 その収束する先 a は一つに定まる。そこでこの値のことを $\{a_n\}$ の $n \to \infty$ のときの**極限**とよび、

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

と表す。

命題 2.4. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束すると仮定する。このとき、

(1)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$$

(2)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n$$

(3)
$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n$$

(4) さらに $\lim_n b_n \neq 0$ を仮定すると、有限個の例外を除いて $b_n \neq 0$ で、

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n / \lim_{n \to \infty} b_n$$