代数学 IB NO.15 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$

命題 15.1. 整域 R について、次の条件を考える。

(条件 1) R はネーター環である。
(条件 2) 任意の $a,b \in R$ に対して、ある d という R の元が存在して、$(a,b)=(d)$ を満たす。
(条件 3) R の既約元はすべて素元である。

このとき、

(1) R が *ED* であれば、*(条件 1)* と *(条件 2)* が成り立つ。
(2) R が *PID* であることは、*((条件 1) and (条件 2))* と同値である。
(3) *(条件 2)* から *(条件 3)* が従う。
(4) *(条件 1)and (条件 3)* から R が *UFD* であることが従う。

R の任意のイデアルが有限個の元で生成される場合に言うのであった。

補題 15.1. ネータ環のイデアルの増大列も、必ずどこかで止まる。

定義 15.1. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、R_1, R_2 の環としての**直積**とは、デカルト積集合 $R_1 \times R_2$ の上に、次のような演算を定義したものである。

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$$

R_1 と R_2 の環としての直積を、普通 $R_1 \times R_2$ と書く。

補題 15.2. R_1, R_2 は環であるとする。このとき、

(1) $R_1 \times R_2$ は環になる。
(2) R_1, R_2 の単位元 がそれぞれ $1_{R_1}, 1_{R_2}$ とすると、$R_1 \times R_2$ の単位元は $(1_{R_1}, 1_{R_2})$ である。
(3) R_1, R_2 がともに可換ならば、$R_1 \times R_2$ も可換である。

命題 15.2. 環 R の元 a,b が $(a,b)=(1)$ を満たすとき、

$$R/(ab) \ni [x]_{ab} \mapsto ([x]_a, [y]_b) \ni R/(a) \times R/(b)$$

なる写像は環の同型を与える。