

今日のテーマ 《素元分解環》(2)

定義 12.1. 環  $R$  と  $a, b \in R$  とにたいして、

- (1)  $a \in bR$  のとき、 $a$  は  $b$  の倍元であるといい、 $b|a$  で書き表す。  
 $b$  を主語として、 $b$  は  $a$  の約元であるともいう。
- (2) ある  $u \in R^\times$  があつて、 $a = bu$  をみたすとき、 $a$  と  $b$  とは同伴であるという。

命題 12.1. 整域  $R$  の元  $a, b$  にたいして、

- (1)  $(a) \subset (b) \Leftrightarrow b|a$ .
- (2)  $a$  と  $b$  が同伴  $\Leftrightarrow (a) = (b)$ .

定義 12.2. 整域  $R$  が与えられているとする。  $d_0 \in R$  が  $a, b \in R$  の最大公約元 (gcd) であるとは

$$\forall d \in R ( d|d_0 \Leftrightarrow (d|a \text{ かつ } d|b) )$$

が成り立つときに言う。

補題 12.1. 単項イデアル環  $R$  のイデアルの増大列

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots$$

は必ずどこかで止まる。すなわちある  $N$  があつて、

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$$

がなりたつ。

上の補題はネータ環の一般論の特殊な場合である。ここで、 $R$  がネータ環であるとは、 $R$  の任意のイデアルが有限個の元で生成される場合に言う。ネータ環のイデアルの増大列も、必ずどこかで止まることが証明できる。証明はほとんど同じなので進んで勉強したい人はやってみられると良い。(余談ながらネータ環は環論において大変重要な対象である。体上有限生成な環は全てネータ環である。(ヒルベルトの基底定理))

命題 12.2.  $R$  が素元分解環ならば、 $R \setminus \{0\}$  の各元は

$$up_1p_2 \dots p_l \quad (l \in \mathbb{N}, u \in R^\times, p_1, \dots, p_l \text{ は } R \text{ の素元})$$

と書くことができるが、この書き方は同伴を除いて一意的である。すなわち、

$$up_1p_2 \dots p_l = vq_1q_2 \dots q_m$$

$$(l, m \in \mathbb{N}, u, v \in R^\times, p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_m \text{ は } R \text{ の素元})$$

ならば、 $l = m$  であつて、なおかつある  $\sigma \in \mathfrak{S}_l$  があつて各  $j$  にたいして  $p_j$  と  $q_{\sigma(j)}$  はそれぞれ同伴になる。

問題 12.1. 整域  $R$  の元  $a, b$  の最大公約元が2つあつたとすれば、それらは互いに同伴であることを証明せよ。

- ED: Euclidean domain
- PID: principal ideal domain
- UFD: unique factorization domain 直訳は「一意分解環」。