自然数の部分集合の全体は可算ではない。

(対角線論法 2)

土基　善文

定義

Definition

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

定義関数

$\mathbb{N}$ の部分集合 S に対し、S の定義関数 χ_S が

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin S \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する。
例: 非負の偶数の全体 $2\mathbb{N}$ の定義関数:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x \in 2\mathbb{N}$?	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...

定義関数の他の例

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$x \in \mathbb{N}$?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$x \in 2\mathbb{N}+1$?	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$x \in P$?	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	...
$x \in \emptyset$?	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

(P は素数全体の集合)
◎$\mathbb{N}$ の部分集合と「値を $\{0,1\}$ にとる $\mathbb{N}$ 上の関数」とはムダ、ムラなく対応する。

定理

Theorem

番号付けられた, $\mathbb{N}$ の部分集合のリスト

$$S_0, S_1, S_2, \ldots,$$

があったとする。
このとき、このリストには含まれない N の部分集合が必ず存在する。

定理の証明

それぞれの集合の定義関数を書いて並べる。

$$
\begin{aligned}
S_0 &: \mathbf{1}01010\ldots \\
S_1 &: 0\mathbf{1}01010\ldots \\
S_2 &: 11\mathbf{1}1111\ldots \\
S_3 &: 010\mathbf{0}100100\ldots \\
S_4 &: 1110\mathbf{1}10110\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

対角線を取り、その数の「裏目」ばかりを採用する。上の例で言えば、対角線 $11101\ldots$ の「裏目」(1 と 0 を入れ替えたもの) $00010\ldots$ を定義関数に持つ集合は上のリストには入らない。

冷たい証明

$S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ が与えられたとする。 $\mathbb{N}$ の部分集合 T を

$$T = \{n \in \mathbb{N}; n \notin S_n\}$$

で定義する。 T は $\{S_n\}$ のなかのどれとも一致しないことを示そう。
もし仮に

$$T = S_{n_0}$$

となる自然数 n_0 が存在したとする。

$$n_0 \in T \Leftrightarrow n_0 \in S_{n_0} \Leftrightarrow n_0 \notin T$$

となって、 $n_0 \in T$ としても $n_0 \notin T$ としても矛盾が生じる。
(S_{n_0} と T の「n_0 が入るか入らないかの部分」は必ず異なるはずなので、 $S_{n_0} = T$ のはずがない。)