

ラッセルのパラドックス

土基 善文

オススメの本:

- ▶ スマリヤン先生の本。(美女か野獣か etc)
- ▶ 野崎昭弘先生の本。(詭弁論理学、逆説論理学 etc)

定義

Definition

集合とは、それに属するか否かがはっきり決まっているような「モノ」のあつまりである。(誰が見てもはっきりとどちらかに分かれていて、しかも意見が食い違わないということが大事である。)

問題

集合全部を集めたものは集合だろうか。

...

問題

集合全部を集めたものは集合だろうか。
... 自分自身を要素として持つ集合

通常集合

Definition

通常集合とは、自分自身を元として持たない集合のことである。

集合 S を次のように定義する。

$$S = \{X; X \text{ は通常集合} \}$$

とおく。

問題

通常集合: 自分自身を元として持たない集合.

S の定義: $S = \{X; X \text{ は通常集合} \}$

問題: $S \in S?$

つまり、 S 自身は通常集合か?

通常集合: 自分自身を元として持たない集合.

S の定義: $S = \{X; X \text{ は通常集合} \}$

もし仮に S が通常集合だとすると、

S : 通常 $\implies S \notin S$ (通常集合の定義)

$\implies S$: 通常でない。 (S の定義)

矛盾。

通常集合: 自分自身を元として持たない集合.

S の定義: $S = \{X; X \text{ は通常集合}\}$

もし仮に S が通常集合でないとする、

S : 通常集合でない $\implies S \in S$ (通常集合の定義)
 $\implies S$: 通常。 (S の定義)

やはり矛盾。

対策 (結論)

- ▶ 素朴な集合の定義では不十分である。
- ▶ 「集合全体を集めたもの」は集合と呼ぶのはまずい。
- ▶ 「自分自身を含む集合」もまずい。

* 集合の集合を考えること自体はよくある。与えられた集合 X の部分集合の全体など。

学習

- ▶ 自分自身を参照する議論は集合論ではこれ以降もよく活躍する。
- ▶ 素朴な集合の定義は不十分ではあるが、まずはこれをよく身につけておいてほしい。